

TRES PUNTOS CRUCIALES EN LA EVOLUCION DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

Luis González

Pocas Ciencias presentan un aspecto tan distinto según se las mire desde fuera o desde dentro, como la Matemática.

Para el profano, la Matemática es una Ciencia venerable, que tiene en su haber el respaldo de una tradición milenaria; es una Ciencia perfecta, acabada, inmutable, en la cual se ha dicho ya la última palabra, y no queda en ella nada por hacer. Presenta el aspecto de un monumento gigantesco y majestuoso, cuya solidez inexpugnable se yergue como un desafío a la eternidad.

Para el matemático, en cambio, su Ciencia es algo palpitante de vida, es una cosa cambiante y en plena evolución. Presenta el aspecto de un volcán en actividad: un buen día revienta por acá un nuevo cráter y expulsa un enorme chorro de lava que hace cambiar el aspecto del paisaje en muchos kilómetros a la redonda; otro día se derrumba por allá una montaña, y el aspecto del paisaje vuelve a quedar profundamente modificado.

Es evidente que, para poder apreciar estos cambios en su verdadera magnitud, es indispensable tener una visión panorámica del paisaje antes y después del cambio.

Así pues, empezaremos por dar una idea general del aspecto que presentaba la ciencia matemática en la época de los griegos.

Dice García Bacca, en su notable *Introducción Filosófica a la Geometría de Euclides*, que la Geometría griega nació bajo el signo de la triple unidad.

Surgen de aquí inmediatamente tres preguntas, a saber:

- I.—¿Por qué se dice habitualmente que la Geometría nació en Grecia? ¿Es que antes de los griegos no había Geometría?
- II.—¿Por qué motivo, al hablar de la ciencia matemática griega, nos referimos especialmente a la Geometría?
- III.—¿Qué quiere decir esto de la triple unidad?

Cada una de estas preguntas habrá de merecer nuestra atención durante breves instantes.

En primer lugar, es bien cierto que antes de los griegos diversas civilizaciones poseyeron conocimientos geométricos nada despreciables. Se cita, por ejemplo, que los chinos conocían un caso particular del teorema de pitágoras, muchos años antes de que floreciera la civilización helénica. Además, es ya una trivialidad casi insoportable, mencionar que los egipcios se servían hábilmente de numerosos conocimientos geométricos que aplicaban con acierto en sus realizaciones prácticas. Pero de esto, a la Geometría como Ciencia racionalizada y sistematizada, hay una gran diferencia.

Trataré de poner en claro esta diferencia, mediante el siguiente ejemplo:

Nosotros vivimos rodeados de fenómenos físicos. Percibimos la luz, el calor, el sonido; vemos el relámpago, la lluvia, el arco iris. Pero todos estos fenómenos, de suyo, no constituyen la Física. La Ciencia física nace cuando el hombre elabora

una interpretación racional de la naturaleza; cuando crea un cuerpo de doctrina teórico, que explica y coordina los hechos observados, de una manera lógica y coherente.

Pues, de igual manera, una cosa son los hechos geométricos aislados, y otra cosa es la Geometría como cuerpo de doctrina científico. Puede decirse con propiedad que la Geometría, como Ciencia racional del espacio, nació realmente en Grecia.

En lo referente a la Ciencia matemática griega, podemos decir que se reducía prácticamente a la Geometría.

En efecto, por más importancia que queramos atribuirles a las contribuciones de los pitagóricos en Aritmética, y a los balbuceos de Diofanto de Alejandría en Álgebra, es lo cierto que: mientras la Geometría salió de manos de los griegos ya adulta, la Aritmética y el Álgebra quedaron en pañales.

Para los griegos, un problema de aritmética que implicara una división, era ya muy complicado desde el punto de vista de la técnica operatoria. Esta es quizá la razón por la cual desarrollaron mucho los problemas de construcción geométrica y de cálculo gráfico.

Veamos ahora qué quiere decir eso de la triple unidad.

En cada época y para cada colectividad ha habido siempre un conjunto de ideas básicas, comunmente aceptadas por todos, ya sea de una manera consciente o inconsciente, y que vienen a ser algo así como el telón de fondo de la vida intelectual. Pues bien, nos dice García Bacca que el tipo mental griego que creó la Geometría se caracterizaba por la creencia filosófica en la unicidad del ser, la unicidad de la verdad ontológica y la unicidad de la verdad óntica. De ahí el nombre de "época de la triple unidad".

Trataremos de explicar brevemente qué quiere decir todo esto.

La unicidad del "ser" quiere decir que cada "ser" no puede ser lo que es, sino de una sola manera; ni más ni menos. Es fácil notar que la unicidad del ser es una consecuencia inmediata o, si se quiere, una modalidad del principio de identidad. En efecto, si un mismo "ser" pudiera ser lo que es de varias maneras distintas, no podríamos predicar la identidad de cada ser consigo mismo.

Ahora bien, la unicidad de la verdad ontológica es una consecuencia inmediata de la unicidad del ser. En efecto, en cada orden de cosas, la verdad, que es patrimonio del ser, que pertenece al ser, que reside en el ser, no puede menos que ser también unitaria.

Acerca de un mismo ser, y bajo un mismo respecto, no podemos predicar dos verdades distintas que sean ciertas las dos. Si el ser es unitario, la verdad ontológica tiene que ser también unitaria; no es algo que ponemos al conocer, sino que suponemos para conocer, y el conocer es un identificarse con ese unitario ser de las cosas.

Por último, cada ser no puede menos de manifestar lo que es, hacerse patente, de una manera también unitaria. Es decir, que los seres no pueden cambiar su tipo de manifestación; no pueden presentarse al mismo tiempo bajo dos aspectos distintos. Y esto es lo que García Bacca entiende por unicidad de la verdad óntica.

Podemos notar desde ahora que, de estos tres principios, el más flojo es el tercero: el de la unicidad de la verdad óntica. Y hasta es posible dudar de que los griegos creyeran realmente en eso, puesto que tal principio no se da en la naturaleza. Ejemplos triviales son: el del agua, que puede presentarse en estado sólido, líquido o gaseoso; y el de ciertos cuerpos que pueden cristalizar en diversos sistemas. Un ejemplo menos trivial es el de la luz, que en ciertos fenómenos se manifiesta como onda y en otros como corpúsculo.

Sin embargo, a este respecto cabe recordar que, para los griegos, la realidad del mundo sensible no era sino un trasunto muy imperfecto de otra realidad superior, menos tangible si se quiere, pero mucho más real y perfecta, que era el mundo metafísico de las esencias.

Como quiera que la Geometría es precisamente eso, un mundo de ideas abstractas, allí se realizaba plenamente el principio de la triple unidad.

En todo caso, es necesario tener en cuenta que eso de querer caracterizar el tipo mental de una época sintetizándolo en una sola frase, es tarea harto arriesgada, y que se trata, en fin de cuentas, de una síntesis interpretativa. Ahora bien, no hay interpretación sin intérprete, con lo cual quiero decir que aun la interpretación más objetiva, estará siempre teñida con la personalidad y los puntos de vista del intérprete. Si tenemos diez intérpretes distintos, tendremos también diez interpretaciones distintas.

Hechas las anteriores salvedades, aceptaremos, pues, la sugestiva interpretación de García Bacca, no como una verdad irrefutable, sino como un esquema útil para comprender la ulterior evolución del pensamiento matemático.

Pero cabe ahora preguntarse: ¿Qué tiene que ver la triple unidad con la Geometría? Esto es lo que vamos a ver en seguida.

A mi entender, la creencia filosófica en la triple unidad no influyó de una manera decisiva en el contenido mismo de la Geometría; pero sí influyó, y de una manera determinante, en la idea que los griegos—y junto con ellos la posteridad—hubieron de formarse acerca de la significación y el valor de la Ciencia matemática.

En efecto, los griegos descubren una Geometría; pero, en virtud del principio de la unidad del ser, lo que han descubierto no es “una” Geometría, sino “la” Geometría, la única Geometría posible, ya que no podría haber dos cuerpos diferentes de doctrina geométrica que fueran ciertos los dos.

Además, si cada proposición de la Geometría es verdadera (lo cual está garantizado por demostraciones rigurosas), entonces, en virtud del principio de la unidad de la verdad ontológica, lo que se ha encontrado no es “una” verdad geométrica, sino que se trata de “la” verdad geométrica, de la verdad única, absoluta, necesaria, inmutable, incontrovertible y eterna.

Finalmente, en virtud del principio de la unidad de la verdad óntica, los seres geométricos no podrán cambiar jamás su tipo de manifestación; no podrán cambiar de estado, como el agua, sino que estarán siempre en el mismo estado geométrico.

Resulta entonces que la Geometría, como conocimiento, significa para los griegos conocimiento de la verdad absoluta.

Pero ahora: ¿Cómo valoran los griegos este conocimiento? A despecho del valor práctico que la Geometría pueda tener en sus aplicaciones a los menesteres cotidianos, los griegos le confieren ante todo y sobre todo un valor especulativo, un valor filosófico, un valor científico. Desde Tales de Mileto, los griegos cultivan la ciencia por la ciencia misma, independientemente de sus aplicaciones prácticas. Ellos tienen un ideal científico; y ésta es una característica muy suya que no se encuentra en civilizaciones anteriores (o que, por lo menos, no se encuentra de una manera tan destacada y explícita), y que constituye uno de los legados más valiosos que el pensamiento griego ha dejado a la posteridad.

Otra característica muy típica del pensamiento griego, y que dejó una huella profunda en la Geometría, es el horror al infinito. Y es que los griegos confundían los conceptos de “infinito”, “ilimitado” e “indeterminado”. Para ellos, una operación de capital importancia era definir, delimitar; porque no se podía hacer ciencia con objetos indeterminados. Es un hecho muy significativo que Euclides haya colocado las “definiciones” en la primera página de su Geometría; luego venían los postulados y por último los axiomas. Lo primero era, pues, definir, delimitar.

Para Euclides una condición esencial de las figuras geométricas es que sean limitadas. Así, por ejemplo, una línea recta será figura geométrica, en tanto que sea un segmento rectilíneo.

Hemos visto hasta aquí cuál era el panorama general que ofrecía la Ciencia matemática en la época de los griegos. Veamos ahora qué sucedió después.

Durante toda la Edad Media, la Geometría griega navegó apaciblemente

por las aguas tranquilas de la verdad absoluta, siempre auspiciada por el signo propicio de la triple unicidad.

Pero al llegar el Renacimiento, empiezan a soplarle vientos de tempestad. En efecto, en el Renacimiento vemos desarrollarse un movimiento de renovación en la Filosofía, que llega a su punto culminante con Descartes. Al favor de las nuevas ideas, se resquebraja un tanto el molde arcaico de la triple unicidad, y la Geometría comienza a respirar una atmósfera de mayor libertad.

Es un hecho demasiado significativo para que pueda pasar inadvertido, que el hombre que orientó la Filosofía hacia el pensamiento moderno, es quien al mismo tiempo inventa la Geometría Analítica.

La Geometría Analítica no nació por un azar de la fortuna, sino que nació como la realización consciente y deliberada de un plan filosófico. Y esto que digo, no son extravagancias de literatos trasnochados, sino que es una verdad histórica. Es el mismo Descartes quien ha presentado la Geometría Analítica como una muestra de su método filosófico. Así, pues, el método de la Geometría Analítica es una manifestación del método cartesiano.

Descartes no la llamó Geometría Analítica, sino simplemente "La Geometría". El nombre de Geometría Analítica se lo dio Ampère unos doscientos años más tarde, y este nombre hizo fortuna y se ha conservado hasta nuestros días. En todo caso, si comparamos lo que hoy se entiende por Geometría Analítica con lo que Descartes realmente escribió, nos quedaremos sorprendidos de ver que casi no se parecen en nada. Lo que Descartes legó a la posteridad no fue una Ciencia acabada, sino solamente un método, "su" método, el método cartesiano. Y este método, en manos de los continuadores, dio por resultado lo que hoy entendemos por Geometría Analítica.

Trataré de explicar ahora por qué motivo y en qué sentido, el invento de la Geometría Analítica constituye un punto crucial en la evolución del pensamiento matemático.

Es bien sabido que en Geometría Analítica las figuras geométricas se representan por medio de ecuaciones. Una línea recta es ahora una ecuación; una circunferencia, una elipse, un plano, una esfera, un elipsoide, son ahora otras tantas ecuaciones.

Los entes geométricos se nos presentan entonces vestidos con ropaje algebraico. Y no se crea que esto es un hecho vanal. No se trata de una simple cuestión de modas. No se trata de vestir la Geometría griega a la moda del Renacimiento. No. Es que los entes geométricos, al presentársenos bajo esta modalidad algebraica, empiezan a decirnos cosas que antes nunca nos dijeron. Es que la Geometría Analítica trae en su seno insospechadas posibilidades, de incalculable trascendencia.

¿Y qué nos dicen ahora los entes geométricos?

Nos dicen que la verdad óptica no es unitaria; que después de Descartes nadie puede seguir creyendo ingenuamente en la unicidad de la verdad óptica; puesto que, con el advenimiento de la Geometría Analítica, lo que ha cambiado es, precisamente, *el tipo de manifestación de los entes geométricos*.

Nos dicen también que este cambio en el tipo de manifestación no ha sido independiente de la acción del entendimiento, puesto que la conexión entre ambos tipos de manifestación se realiza a través de un artificio puesto por la mente humana: el sistema de coordenadas. Resulta claro entonces que hay acto de creación en el fenómeno del conocer, y que depende de la actividad del entendimiento el que las cosas se nos presenten de una o de otra manera.

Nos anuncian, en fin, que ha despuntado un nuevo día y que las Matemáticas han emprendido el camino hacia la libertad.

¿Y en qué forma ha propiciado la Geometría Analítica esa libertad del pensamiento?

Es muy sencillo: la Geometría Analítica es la llave que le abre al entendimiento las puertas de la cárcel tridimensional. Y esto se realiza con una facilidad asombrosa; con sólo agregar nuevas variables a las ecuaciones, éstas representarán figuras geométricas de espacios tetra, penta, o enedimensionales.

Así, por ejemplo, con sólo agregar una variable más a la ecuación de una esfera, dicha ecuación representará un espacio tridimensional curvo, cerrado sobre sí mismo, zambullido en un espacio tetradimensional, y tal que todos sus puntos equidistan de un punto dado del espacio tetradimensional.

A este respecto es interesante recordar que Aristóteles trató de demostrar, mediante argumentos filosóficos, la imposibilidad lógica de un espacio de más de tres dimensiones; y dedujo de ello que el espacio, teniendo ya tres dimensiones, tiene la plenitud de lo que es posible tener, y que, por consiguiente, es perfecto.

Y de paso, el inocente número 3 resultó salpicado, porque para Aristóteles, también era perfecto.

Es oportuno señalar aquí que, por muy propicio que hubiera sido el clima filosófico, Descartes no habría podido inventar la Geometría Analítica si el Algebra no hubiera adquirido previamente un desarrollo adecuado.

Nosotros habíamos dejado el Algebra en manos de Diofanto de Alejandría. Pero de ahí pasó a manos de los árabes, quienes la hicieron adelantar mucho y la introdujeron en Europa hacia el año 950. Es posible conjeturar que, como los árabes poseían un sistema de numeración infinitamente superior al de los griegos, estaban en mucho mejores condiciones que ellos para poder desarrollar el Algebra.

A la contribución de los árabes hay que agregar la de los algebristas italianos del Renacimiento anteriores a Descartes, entre los que podemos mencionar a Tartaglia; Ferrari y Cardano; y finalmente el matemático francés Viète introdujo perfeccionamientos muy notables en el sistema de notaciones algebraicas.

Otro aspecto renovador y, si se quiere, revolucionario de la Geometría Analítica, es que introdujo en las Matemáticas la *indeterminación* como un elemento de trabajo.

Trataré de explicar brevemente en qué forma se llevó a cabo este proceso. Ya hemos visto anteriormente que los griegos le tenían horror al infinito; y este horror al infinito es también, en el fondo, horror a lo indeterminado, puesto que ellos no distinguían los conceptos de "infinito" y de "indeterminado".

Resulta entonces que el primer paso a dar consistía en separar estas dos nociones. Y este paso lo dio el cristianismo (1).

En efecto, el Dios de los cristianos es un Dios infinito, pero al mismo tiempo es un Dios personal. Es una persona, no tiene nada de indeterminado. No es idea cristiana identificar a Dios con las fuerzas ciegas de la naturaleza. Quien diga que cree en un Dios impersonal e indeterminado, no es cristiano.

Y lejos de sentir horror al infinito, el ideal cristiano consiste precisamente en llegar a identificarse de alguna manera con El, en llegar a entenderlo mediante una "intuición" del alma.

Para los griegos, la infinitud era un imperfección, porque significaba privación de finitud. Para los cristianos, en cambio, la finitud es una imperfección porque significa privación de infinitud, privación de Dios.

Vemos pues cómo el cristianismo ha separado estas dos ideas de "infinito" y de "indeterminado".

(1) GARCIA BACCA (Obra citada).

Ahora bien, la Geometría Analítica introduce la indeterminación en el cuerpo de las Matemáticas, porque la contextura misma de la Geometría Analítica consiste en un entramado de constantes *indeterminadas* y de cantidades variables.

Mediante un juego de constantes indeterminadas, la Geometría Analítica logra representar, con una sola ecuación, curvas tan distintas como la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, poniendo así en evidencia la íntima conexión que entre ellas existe.

Y por último, la Geometría Analítica “enderezó los caminos” para el advenimiento del cálculo infinitesimal.

Y llegamos aquí al segundo punto crucial en la evolución del pensamiento matemático.

El cálculo infinitesimal fue inventado por Leibniz y por Newton casi al mismo tiempo, pero independientemente uno de otro.

Esta gran hazaña del pensamiento humano ocurrió unos 50 años después de la invención de la Geometría Analítica. La Geometría de Descartes fue publicada en el año 1637, y la obra de Newton, *Principios Matemáticos de Filosofía Natural*, apareció en 1687.

Las circunstancias en que se produjeron estos dos acontecimientos fueron muy distintas. La Geometría Analítica había sido acogida con beneplácito general. Casi no tuvo opositores ni provocó grandes discusiones, pues, a fin de cuentas, de lo que se trataba era simplemente de un nuevo método para resolver los problemas de Geometría que los griegos habían dejado pendientes de solución.

El cálculo infinitesimal, en cambio, cayó como una bomba atómica. Levantó una tempestad enorme y produjo discusiones acaloradísimas durante muchos años.

Los matemáticos de la época se dividieron en dos bandos: unos que aceptaban el nuevo cálculo y otros que lo rechazaban de plano.

Y lo peor del caso es que quienes lo impugnaban llevaban la de ganar, porque esgrimían en su contra argumentos de una lógica quemante.

El nuevo cálculo presentaba, en efecto, una dualidad misteriosa y desconcertante: por una parte, parecía estar basado en una contradicción muy manifiesta, y esto era lo que inquietaba a los puristas de la lógica; pero por otra parte conducía siempre a resultados correctos, y además su utilidad era palmaria. De manera que quienes lo aceptaban, ponían oídos de mercader a las objeciones de los lógicos, y adoptaban más bien una actitud pragmática.

A este respecto es interesante recordar que un matemático de la época decía: “Allez en avant et la foi vous viendra!” No se puede negar que resulta extraña esta exhortación a la fe en un asunto de Matemáticas puras.

Con el correr de los años el cálculo se fue imponiendo, porque resultó ser de una fecundidad maravillosa; hasta que por fin se convino en decir que en realidad era matemáticamente correcto, pero que sus principios habían sido expuestos de una manera defectuosa.

Durante el siglo pasado matemáticos muy eminentes, como Cauchy y Weierstrass, se dieron a la tarea de edificar el cálculo sobre conceptos matemáticos rigurosos, y lograron darle una estructura formal que fue considerada como impecable. Desde entonces, todo el mundo se dio por satisfecho y nadie volvió a hablar más del asunto.

Sería imposible explicar aquí lo que es el cálculo infinitesimal como técnica matemática. Pero para los fines que nos interesan, podemos decir lo siguiente:

El mundo de las Matemáticas presenta una polaridad; hay en él dos polos diametralmente opuestos: el polo de lo infinitamente pequeño y el polo de lo infinitamente grande. Pues bien, Leibniz y Newton fueron los intrépidos exploradores que en el siglo XVII exploraron el polo de lo infinitamente pequeño; digamos, el polo Sur de las Matemáticas. El cálculo infinitesimal es, pues, la técnica matemática ade-

cuada para manipular lo infinito-tan temido por los griegos-, pero bajo esta modalidad especial de lo infinitamente pequeño.

¿Y qué nos dijeron esos intrépidos exploradores cuando regresaron de su viaje por esas tierras lejanas? Nos hicieron una revelación sensacional: nos dijeron que allá, en ese mundo misterioso de lo infinitamente pequeño, no funciona el principio de identidad.

Y ésta es la razón por la cual, a mi entender, el cálculo infinitesimal es un punto crucial en la evolución del pensamiento matemático. En efecto, el cálculo infinitesimal demostró que es posible crear un sistema de pensamiento perfectamente coherente consigo mismo—y por añadidura de una fecundidad insondable—, saltando por encima del principio de identidad.

Y ésta es también la razón por la cual el cálculo infinitesimal, en su época, produjo una conmoción tan profunda y provocó una reacción tan violenta. El espíritu de aquella época no estaba todavía maduro para recibir semejante mensaje y por eso lo recibió con una negativa rotunda.

Yo sé que todo esto puede sonar en los oídos de muchos como una blasfemia lógica; pero ahora vamos a oír otra del mismo calibre.

Al final del siglo XIX, un matemático alemán llamado Cantor emprendió un viaje de exploración al polo de lo infinitamente grande, y creó una doctrina matemática que se llama la Aritmética transfinita, o Aritmética del infinito.

Pues bien, cuando los trabajos de Cantor fueron publicados, sobrevino otra conmoción semejante a la provocada en el siglo XVII por el cálculo infinitesimal. Los matemáticos se volvieron a dividir en dos bandos: unos que aceptaban las doctrinas de Cantor y otros que las rechazaban enérgicamente. Entre estos últimos estaba el eminente matemático francés Lebesgue (muerto en 1941) quien, refiriéndose a la Aritmética transfinita de Cantor, se expresó más o menos en los siguientes términos:

“Hay que saber si el espíritu humano debe trabajar para los dioses y preparar para ellos teorías que nosotros nunca podremos comprender, sobre objetos que nunca podremos concebir”.

Estos matemáticos anti-cantorianos se resistían a admitir la validez misma de los fundamentos de la Aritmética de Cantor, que creaba seres matemáticos que desafiaban toda construcción de la mente humana, y que eran incognoscibles e inaccesibles.

¿Y cuál era, en el fondo, el motivo de esa oposición tan encarnizada? Es fácil imaginarlo. Es que el mensaje de Cantor, cuando regresó de su viaje por ese mundo fantástico de lo infinitamente grande, era el siguiente: Que allá, en el otro polo de las Matemáticas, tampoco funciona el principio de identidad.

Pues bien, a despecho de las enérgicas protestas de los no cantorianos, la Aritmética transfinita de Cantor fue abriéndose paso poco a poco con el correr de los años, y hoy constituye una extensa rama de las Matemáticas.

¿Quiere decir todo esto que el principio de identidad es falso y que debemos renunciar a él?

¡No! ¡En manera alguna!

El principio de identidad es al matemático, lo que la brújula es al navegante. Y así como la brújula resulta inoperante en los polos de la Tierra, el principio de identidad resulta inoperante en los polos del conocimiento matemático. Pero renunciar al principio de identidad sería una actitud tan absurda, como si el navegante tuviera que renunciar a la brújula so pretexto de que es inoperante en los polos.

El principio de identidad, de suyo, no es ni cierto ni falso, sino que es operante o inoperante. Dicho de otra manera, el principio de identidad no es una verdad necesaria, sino que es una verdad contingente.

Y a este respecto cabe recordar aquí la suerte que ha corrido, en el domi-

nio de la Física, otro de los principios fundamentales de la lógica. Me refiero ahora al principio de causalidad.

El eminente físico alemán Max Plank (inventor de la teoría de los cuantos) en su libro *A dónde va la Ciencia* se constituye en defensor denodado del principio de causalidad; pero declara explícitamente que el principio de causalidad no es una verdad necesaria, sino que es una verdad contingente; y que por lo tanto, corresponde a cada Ciencia particular el investigar si, dentro de su propio campo de acción, resulta válido.

Así, por ejemplo, es por lo menos discutible que en el mundo de la psicología, en la esfera de las acciones humanas, sea válida una estricta causalidad; es decir, que no haya libre albedrío.

Pero volvamos nuevamente al cálculo infinitesimal y al principio de identidad.

Es un hecho bien sabido que Newton inventó el cálculo infinitesimal para resolver el problema del movimiento; es decir, para edificar sobre él la Mecánica, que es la Ciencia racional del movimiento, así como la Geometría es la Ciencia racional del espacio.

Y esta empresa fue coronada por el éxito más espectacular que han conocido los siglos.

Ahora bien; Parménides, en el siglo VI antes de Jesucristo, había introducido en la Filosofía el principio de identidad como método de trabajo. Y armado con este instrumento poderoso, lo aplicó inmediatamente a resolver el problema del movimiento. El resultado fue el fracaso más rotundo. Parménides llegó a la conclusión de que el movimiento es ininteligible, porque es contrario a la razón. Según Parménides, la razón nos dice que el mundo tiene que estar necesariamente en reposo y por consiguiente, nunca será posible edificar una ciencia racional del movimiento.

Y Parménides se encontró ante esta disyuntiva: ¡La razón, o el movimiento! Y se quedó con la razón, y negó el movimiento. Para Parménides el movimiento no es más que una apariencia, y nosotros vivimos en un mundo de apariencias.

Pero ahora podemos preguntarnos: ¿Dónde reside la causa del fracaso de Parménides y del éxito de Newton?

La respuesta es sencilla: El principio de identidad es rigurosamente válido en un mundo inmutable. Allí se realiza plenamente el principio de la unicidad de los seres. Allí podemos predicar siempre la identidad de cada ser consigo mismo. Pero en un mundo cambiante, donde los seres están en un constante devenir, ya no podemos predicar la perpetua identidad de cada ser consigo mismo. Así, por ejemplo, cada uno de nosotros tiene conciencia de ser siempre la misma persona, el mismo ser; pero también cada uno tiene conciencia de no ser idéntico a sí mismo en todos los instantes de su vida. Una persona adulta es sumamente distinta de como era en la niñez, y sin embargo es siempre la misma persona, el mismo ser.

Pues bien, el Cálculo Infinitesimal logra captar en fórmulas matemáticas este fluir, este devenir de los seres. Y para lograrlo, tiene que estudiar el proceso de ese tránsito durante un lapso cortísimo, infinitamente pequeño; y allí, en ese dominio de lo infinitamente pequeño, se ve obligado a forzar, a trasgredir el principio de identidad.

El fracaso de Parménides consiste en que, consecuente con la lógica más estricta, no llegó a dar este paso. Parménides introdujo inmutabilidad en sus premisas, y obtuvo inmutabilidad en sus conclusiones. Newton, en cambio, forzando el principio de identidad en el dominio de lo infinitamente pequeño, obtuvo la Ciencia racional del movimiento.

En el ámbito de las Matemáticas, el problema del movimiento está ubicado en el polo de lo infinitamente pequeño.

Y para terminar con este punto, recordemos aquí que en 1914 Ortega y Gasset clamaba por la creación de una nueva lógica, que él llamaba la lógica del dinamismo

la lógica de la vida, en contraposición con la lógica de Aristóteles, que él llamaba lógica estática.

Pues a mi modo de ver, esta lógica del dinamismo, por la cual clamaba Ortega y Gasset, es la que alienta y preside el desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Coloquémonos ahora en las postrimerías del siglo XVIII y los albores del siglo XIX, y veremos desarrollarse el tercer acto de este drama, que es el descubrimiento de las Geometrías no euclidianas.

Desde la más remota antigüedad, el V postulado de Euclides, o sea el postulado del paralelismo, había llamado la atención de los matemáticos, porque este postulado, en el sentir general, no presentaba el mismo grado de evidencia que los anteriores. Se pensaba que, si aquello era verdad, y no siendo una verdad evidente por sí misma, debería ser posible demostrarla basándose únicamente en los postulados anteriores y en los axiomas, o en algún otro teorema previamente demostrado y que no se basara en el postulado mismo.

El asunto cobró gran interés, y los espíritus más esclarecidos se dedicaron con ahínco a resolver el problema. Pero los siglos vieron sucederse una generación tras otra, y el V postulado se resistía siempre a revelar su arcano. En los albores del siglo XIX, el V postulado de Euclides había llegado a convertirse en la piedra de escándalo de las Matemáticas.

Entonces, en vista de que todos los intentos de demostración anteriores habían fracasado, un matemático húngaro llamado Bolyai, y otro matemático ruso llamado Lobatschewski, trabajando independientemente uno del otro, intentaron demostrar el V postulado por reducción al absurdo.

El mecanismo de una demostración por reducción al absurdo es el siguiente: Si A y B son dos proposiciones mutuamente excluyentes, y queremos demostrar que la proposición A es cierta, podemos suponer que sea cierta la proposición B, y sacar las consecuencias lógicas que de ahí se deduzcan; pero si la proposición B es realmente falsa, pronto llegaremos a una contradicción manifiesta. Tal contradicción demostrará la falsedad de B y, por consiguiente, la verdad de A.

Este procedimiento parecía infalible para demostrar que el V postulado es una verdad necesaria.

Así pues, cada uno de nuestros dos matemáticos tomó como punto de partida alguna hipótesis contraria al V postulado, pero conservando intactos todos los otros y, desde luego, conservando también los axiomas. Y se dedicaron con empeño a desarrollar las consecuencias lógicas que de tales hipótesis se deducían, esperando siempre encontrar, en algún recodo del camino, la tan ansiada contradicción. Pero sucedió que, después de muchos años de andar con la linterna de Diógenes buscando obstinadamente una contradicción en pleno día, no la hallaron por ninguna parte.

Y al final vino a suceder que cada uno de estos matemáticos había creado una extensa doctrina geométrica perfectamente coherente consigo misma, exenta de contradicción y, sin embargo, contraria al V postulado.

Desde el punto de vista matemático, cada una de estas Geometrías no-euclidianas es tan cierta como la Geometría de Euclides; puesto que, en Matemáticas, el único criterio para juzgar si una doctrina es cierta o falsa, es la coherencia interna.

Se ve claro entonces que, por lo menos en Matemáticas, la verdad ontológica no es unitaria, puesto que ahora nos encontramos en presencia de diversas Geometrías, incompatibles unas con otras y, sin embargo, exentas de contradicción interna.

Y ésta es la razón por la cual, a mi entender, el descubrimiento de las Geometrías no euclidianas es otro punto crucial en la evolución del pensamiento matemático.

Claramente se comprende que un descubrimiento de semejante envergadura, produjo, en su época, un desconcierto y una perplejidad indescriptibles.

Y nosotros podemos preguntarnos: ¿Dónde reside la causa de que, modifi-

cando los postulados de la Geometría euclídea, puedan crearse otros sistemas de Geometría distintos sin caer en contradicción?

La respuesta es sencilla: Es que los postulados de la Geometría no son verdades necesarias como se había creído durante siglos, sino que son verdades contingentes. Por este motivo no se cae en contradicción cuando se prescinde de uno de ellos y se adopta otro diferente.

Es que la Matemática no es la Ciencia de la verdad necesaria, como se oye decir a veces por ahí. Hasta hace poco tiempo era costumbre citar la verdad matemática como un ejemplo típico de verdad necesaria, pero esto es falso.

Y surge inmediatamente esta pregunta: Si la Matemática no es una ciencia de verdades necesarias, entonces ¿qué es? Podemos decir que es una ciencia de verdades puramente formales. Es un mecanismo lógico que asegura la correcta relación de las ideas que llevan desde las premisas hasta las conclusiones. La Matemática en sí no es ni cierta ni falsa. Puede ser comparada con la maquinaria de una industria, que transforma la materia prima (las premisas) en productos manufacturados (las conclusiones).

Si ahora se nos ocurre volver la mirada hacia atrás para formar conciencia del camino recorrido, veremos cuán lejos estamos de la triple unicidad y de la verdad absoluta de los griegos.

El epílogo de este drama en tres actos es el siguiente:

Que la Matemática, después de tantas vicisitudes y zozobras, y asqueada al fin de su comercio con el mundo de la realidad sensible, se metió en un convento y se dedicó a la introspección; es decir, se dedicó a estudiarse a sí misma, a estudiar su propia estructura interna.

El descubrimiento de las Geometrías no-euclidianas puso en claro un hecho de capital importancia; y es que la posibilidad de las demostraciones matemáticas no reside en el contenido concreto de las proposiciones, sino solamente en su contenido relacional.

Y este hecho es tan importante que determina el perfil y la orientación del pensamiento matemático del siglo XX.

Este movimiento de introspección del cual he hablado hace un instante, ha venido a cristalizar en la axiomática moderna, que surge, por decirlo así, de las cenizas de la triple unicidad.

¿Y qué es la axiomática moderna? Es un esfuerzo (muy bien logrado por cierto) para expulsar de las Matemáticas hasta el último vestigio de intuición sensible. Las definiciones axiomáticas ya no definen cosas concretas, sino que definen solamente relaciones; relaciones entre elementos cuya esencia misma consiste en estar ligados por esas relaciones, en ser los términos de esas relaciones.

Y estas definiciones axiomáticas, totalmente vacías de todo contenido sensible, ya no son ciertas ni falsas en sí, sino que son puramente convencionales. A un sistema matemático de premisas ya no se le pide que sea coherente con el mundo de las realidades sensibles. Lo único que se le pide es que reúna estas dos condiciones: independencia mutua, y coherencia interna.

El movimiento de la axiomática representa, pues, la primacía de la relación sobre la sustancia; y la Matemática viene a ser entonces una Ciencia de puras relaciones.

Y el movimiento axiomático, desarrollándose por este camino, ha conducido a la Matemática del siglo XX a la más sublimada abstracción.

Después de lo dicho, resulta fácil comprender el profundo sentido que encierra esta famosa frase de Bertrand Russell.

"La Matemática es la Ciencia en la cual uno nunca sabe de qué está hablando, ni si lo que está diciendo es cierto o falso".