

CONSISTENCIA E INTEGRIDAD DE UN SISTEMA PROPOSICIONAL NO TAUTOLOGICO

Roberto Murillo Z.

Es posible definir las nociones de "consistencia" e "integridad" de un sistema axiomático de tal manera que valgan para sistemas no-tautológicos. Tales son, literalmente, las definiciones de Tarski, que traducimos a continuación: "Una teoría deductiva se llama *consistente* o *no-contradictoria* si no es el caso de que dos enunciados válidos (asserted) de esta teoría se contradigan entre sí, o, en otras palabras, si de cualesquiera dos proposiciones contradictorias... al menos una no puede ser probada. Una teoría se llama "*íntegra*" (complete), por otro lado, si de cualesquiera dos proposiciones contradictorias formuladas exclusivamente en los términos de la teoría bajo consideración (y las teorías que la preceden) al menos una proposición puede ser probada en esta teoría" (1).

Como dice Alonzo Church "la noción de consistencia de un sistema logístico es semántica en la motivación y surge del requisito de que... no haya dos teoremas de los cuales uno sea la negación del otro" (2). Sin embargo, Church busca modificar esta noción para hacerla de "carácter" sintáctico. Para ello entre otras, da la definición de "consistencia absoluta": "un sistema logístico es *absolutamente consistente* si no todas sus proposiciones y formas proposicionales son teoremas". Hace ver que si hay dos teoremas que se contradicen, todas las proposiciones y formas se pueden probar dentro del sistema. La inversa es obvia.

Lo mismo ocurre con la noción de "integridad". Semánticamente, es "íntegro" aquel sistema en que se cumple el siguiente requisito: de cada proposición, o ella o su negación son un teorema. Sintácticamente, se puede dar la siguiente definición: Un sistema logístico es *absolutamente "íntegro"* si al agregar un axioma independiente, el sistema se torna inconsistente.

Church habla de un *sistema logístico*, es decir, de un sistema de la lógica formal, de un sistema de enunciados lógicos. Tarski habla de una *teoría deductiva*, es decir, de un sistema que puede ser extralógico —por ejemplo, un sistema axiomático científico—, que consta de enunciados indiferentes o contingentes. ¿Podríamos extender las negociaciones sintácticas de Church también a las teorías deductivas así entendidas? Concretamente, ¿podemos extenderlas a la lógica proposicional no-tautológica?

A primera vista, no hay dificultad, y sin embargo, una decisión se impone. De sus definiciones Church saca la conclusión de que uno de sus sistemas logísticos es "íntegro" y consistente. Y es "íntegro" porque si se le agregara como axioma una forma proposicional no-tautológica, se haría inconsistente. Es más, de su razonamiento

(1) Tarski, Alfred. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*, Oxford University Press, New York, 1954, p. 135.

(2) Church, Alonzo. *Introduction to mathematical logic*, Princeton, New Jersey, 1965. Vol. 1º p. 18. Vid. ss.

se infiere que siempre un axioma no-tautológico hace inconsistente un sistema. Simplificado, este razonamiento es el siguiente: de una forma proposicional B indiferente se sigue, por sustitución de las variables por constantes, el valor falsedad (por ser B indiferente, alguna evaluación de las variables hará a B falsa). Pero "B implica falsedad" es una tautología, que como tal, es verdadera aunque no haya sido postulada. Dicha tautología implica la negación de B. En el sistema se prueban B y la negación de B. Church, pues, ha hecho posible que un sistema lógico sea íntegro, haciendo imposible que un sistema no-tautológico sea consistente; y todo ello en virtud de que B *implique* una en particular de sus evaluaciones: la que la hace falsa.

Pero podemos decidarnos por prohibir tal diferencia. Entonces puede haber sistemas consistentes contingentes, pero no puede haber sistemas íntegros tautológicos. Es la decisión que hacemos aquí.

Tiene sentido entonces el problema central de este artículo. Este problema es el siguiente: ¿qué condiciones debe tener un sistema axiomático escrito en lógica de proposiciones para ser a la vez consistente e "íntegro"? Más concretamente: ¿qué forma debe tener la conjunción de los axiomas, escrita en forma conjuntiva normal óptima (3), para que el sistema sea a la vez consistente e "íntegro"?

Con n variables pueden formularse $2^{(2n)}$ enunciados no-equivalentes (4). La conjunción de cualesquiera axiomas contruidos con n variables se identifica, por lo tanto, con uno de esos enunciados. Escribamos el enunciado correspondiente en f.c.n.o. (5), lo cual siempre es posible. ¿Qué consecuencias no equivalentes entre sí se pueden obtener de él? Hay un procedimiento mecánico para averiguarlo: todas las posibles conjunciones parciales que se contienen en la f.c.n.o. son tales consecuencias. Así, por ejemplo, si la conjunción de los axiomas en f.c.n.o. es:

$$(p \vee q) \cdot (\neg p \vee q)$$

los teoremas serán:

1. $(p \vee q) \cdot (\neg p \vee q)$
2. $(p \vee q)$
3. $(\neg p \vee q)$
4. La tautología

Los $2^{(2n)}$ enunciados no equivalentes son todas las conjunciones pareiales de la f.c.n.o. del enunciado contradictorio. Este consta de 2^n miembros conjuntivos (6). De él se pueden deducir todos los otros enunciados. El sistema que resulta de esta

- (3) "Una expresión se encuentra en la forma normal conjuntiva cuando contiene únicamente los signos conectivos " . ", " , ", y " - ", cuando además ningún signo de negación afecta a ningún " . ", " , " ni " - ", finalmente cuando por añadidura el signo " ~ " no afecta a ningún " . ", " , " ."

(Por motivos tipográficos, hemos puesto en terminología de Russell los signos de conjunción y negación).

Hilbert, D. y Aekermann, W., *Elementos de Lógica Teórica*, Tecnos, Madrid, 1962 p. 25. Esta forma se llama "óptima" si en cada miembro conjuntivo se contienen, negadas o no-negadas, todas las variables que aparecen en la forma.

- (4) Id., Id., p. 30 s.

- (5) "Forma conjuntiva normal óptima". En adelante, usaremos esas siglas.

- (6) "Si ordenamos los 2^n miembros obtenidos y representamos por " + " la elección de uno de ellos para incluirle en una expresión que contenga cierto número de ellos unidos conjuntivamente, y por " — " el rechazo (la no inclusión en tal expresión), el número de expresiones distintas que podemos formar será el de variaciones con repetición de dos elementos (" + " y " — ") tomados de 2^n en 2^n , o sea, $2(2^n)$ ".

Hilbert D., *op. cit.* p. 31. Nota del traductor, V. Sánchez de Zavala.

manera es un sistema inconsistente. La conjunción de axiomas de este sistema, para dos variables, es la siguiente:

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q) \cdot (\neg p \vee \neg q)$$

Así, para que un sistema no-tautológico sea consistente, la conjunción de sus axiomas en forma conjuntiva normal óptima debe constar *a lo más* de $(2^n - 1)$ miembros conjuntivos. En tal sistema se deducirán $2^{(2^n - 1)}$ enunciados no equivalentes: no se deducirán todos, ya que $2^{(2^n - 1)} < 2^{(2^n)}$.

Notemos, para hacer referencia a la definición semántica de consistencia, que si agrupamos los $2^{(2^n)}$ enunciados en pares de contradictorios, lo más que en un sistema consistente puede deducirse es la mitad de ellos, es decir,

$\frac{2^{(2^n)}}{2}$ enunciados. Pero $\frac{2^{(2^n)}}{2} = 2^{(2^n - 1)}$, que es la cifra exigida por la definición sintáctica.

Por otra parte, para que un sistema sea íntegro, la conjunción de sus axiomas en f.c.n.o. debe constar a lo menos de $(2^n - 1)$ miembros conjuntivos. Si constara, por ejemplo, de $2^n - 2$, se le podría agregar como axioma uno de los miembros que le faltan para identificarse con la contradicción, sin hacer inconsistente el sistema. Por tanto, el sistema de $2^n - m$ miembros conjuntivos, con $m > 1$, no es íntegro.

Para hacer referencia a la definición semántica de integridad, diremos que de cada par de los $2^{(2^n)}$ enunciados contradictorios, en un sistema íntegro debemos probar

por lo menos un enunciado. Como hay $\frac{2^{(2^n)}}{2}$ pares, debemos probar al menos este número de enunciados, es decir, $2^{(2^n - 1)}$.

Por tanto, para que un sistema axiomático no-tautológico proposicional sea consistente e íntegro, debe constar la conjunción de sus axiomas en f.c.n.o. de $2^n - 1$ miembros conjuntivos.

¿Cuántos sistemas distintos, consistentes e íntegros, pueden establecerse para n variables? De los 2^n miembros conjuntivos del enunciado contradictorio, podemos excluir, sucesivamente, cada uno de los miembros y conservar los otros, dando lugar así a otros tantos sistemas. Habrá por tanto 2^n sistemas distintos.

Ejemplificaremos en el cálculo de dos variables.

Las conjunciones de axiomas de los sistemas íntegros y consistentes son las siguientes:

- 1) $(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q)$ equivalente a $p \cdot q$
- 2) $(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee \neg q)$ equivalente a $p \neg \rightarrow q$
- 3) $(p \vee q) \cdot (\neg p \vee q) \cdot (\neg p \vee \neg q)$ equivalente a $p \leftarrow \neg q$
- 4) $(p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q) \cdot (\neg p \vee \neg q)$ equivalente a $p \downarrow q$

Los enunciados implicados por una conjunción de axiomas son los que no contienen ningún miembro conjuntivo no contenido en la f.c.n.o. de aquella conjunción, y sólo éstos. Así, los enunciados implicados por

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q)$$

son todos los que no contienen $(\neg p \vee \neg q)$ en su forma conjuntiva normal óptima, y sólo éstos. En este ejemplo, son los siguientes:

- 1) $(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q)$
- 2) $(p \vee q) \cdot (p \vee \neg q)$
- 3) $(p \vee q) \cdot (\neg p \vee q)$
- 4) $(p \vee \neg q) \cdot (\neg p \vee q)$
- 5) $(p \vee q)$
- 6) $(p \vee \neg q)$
- 7) $(\neg p \vee q)$
- 8) La tautología

Cuando los enunciados no contienen ningún miembro conjuntivo en común, son contradictorios. Contamos por lo tanto, en la forma conjuntiva normal óptima, con un procedimiento mecánico para hallar el enunciado contradictorio de otro dado. El contradictorio de A es la conjunción parcial que le falta para constituir el esquema de la contradicción.