EVOLUCION DEL ALGEBRA: CATEGORIAS

Enrique Góngora

Heráclito nos enseña que las cosas (no diferenciaremos aquí "cosas concretas" y "cosas abstractas") se encuentran en continuo fluir. Aunque reconocida en general como sabia y valiosa, existe sin embargo una marcada tendencia a olvidarse de esta enseñanza y a contemplar las cosas como estáticas, desprovistas de desarrollo.

Sería poco aconsejable que el científico, el matemático (a quien no considero como muy representativo de la casta de los científicos), el educador y el pensador en general cayesen en este error. Muy por el contrario, son ellos los que deben desarrollar una mayor capacidad para detectar este continuo fluir, deben ser en cada momento conscientes de él.

La gran mayoría de los libros que se han publicado sobre problemas filosóficos de las Matemáticas parece aceptar las enseñanzas de Heráclito, hasta un poco después de 1930; a saber, dan la impresión de que las Matemáticas se desarrollan hasta esa época, pero que su desarrollo termina allí. Tales libros suelen versar sobre las ideas y problemas que condujeron a la teoría de conjuntos y sobre sus paradojas, sobre el concepto de función y de número, sobre la todavía hoy por algunos llamada "Algebra Moderna", refiriéndose bajo este nombre a la teoría de las estructuras algebraicas desarrollada cerca de 1930 por E. Artin, E. Nöther, O. Schreier, B. L. van der Waerden, etc.

Siguiendo el consejo de Nietzsche ("Die Welt braucht ewig die Wahrheit; also braucht sie ewig Heraklit"), me voy a permitir hacer un rápido análisis de algunos cambios que ha sufrido el álgebra en los últimos tiempos. Sin embargo, para una mayor comprensión de los problemas algebraicos de esta segunda mitad del Siglo XX, creo necesario hacer primero un rápido análisis de las ideas que dominaban el panorama algebraico de mediados de la primera mitad de este siglo, o sea, repetiré de algún modo lo que se encuentra en libros del tipo mencionado anteriormente.

El advenimiento de la teoría de las estructuras algebraicas comenzó cuando los matemáticos dejaron de interesarse por conjuntos de números, sumas y productos de ellos, por permutaciones y composiciones de ellas, por rotaciones o traslaciones y sus composiciones; todo esto (y mucho más) comenzó a ser algebraicamente interesante por cuanto cada uno de los ejemplos anteriores constituye "un conjunto dotado de una (o varias) operación (operaciones) que obedece a ciertas leyes o axiomas", o sea: comienzan a ser interesantes "qua estructura algebraica". Los ejemplos mencionados constituyen solamente unos pocos de una de las estructuras algebraicas que alcanzó más popularidad en ese entonces, la estructura llamada grupo. Para fijar un poco más nuestras ideas me permitiré dar la definición de esta estructura (1).

Consideremos un conjunto A. Este conjunto se llamará un grupo si en él está definida una operación (que designaremos con "*") que satisface los axiomas siguientes:

---

(1) Tendenciosamente, me permitiré definir la estructura de grupo un poco al gusto de los matemáticos de la época a que me refiero.

a) El resultado de operar dos elementos cualesquiera de A es de nuevo un elemento de A, o sea, si a y b son elementos de A, entonces $a * b$ es de nuevo un elemento de A.

b) Los elementos de A respecto a esta operación cumplen la llamada "ley asociativa", o sea, si a, b, c son elementos de A, entonces

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Esta ley nos permite "asociar" a nuestro gusto los elementos de A, sin alterar el resultado de la operación.

c) Existe en A un elemento privilegiado que designaremos con la letra e, el cual, al ser operado con cualquier otro elemento a de A, nos da como resultado este mismo elemento a, o sea: $e * a = a$ (más correctamente, $e * a = a * e = a$) para cualquier elemento de A. Tal elemento privilegiado recibe el nombre de elemento neutro de A respecto a la operación "*".

d) A cada elemento a del conjunto A corresponde un otro único elemento de A que recibe el nombre de elemento inverso de a (respecto a la operación "*") y que designaremos por a', que presenta la propiedad de que, al ser operado con a, se obtiene como resultado el elemento neutro, o sea, $a * a' = e$ (más correctamente, $a * a' = a' * a = e$).

Interesante es hacer notar ahora, que en nuestra definición no damos (ni pedimos) ninguna información sobre la naturaleza de los elementos que constituyen el conjunto en cuestión. No decimos si ellos deben ser números o automorfismos, elefantes o unicornios. Tampoco nos interesa si el conjunto es "grande" o "pequeño". Nótese que tampoco damos ni pedimos información sobre la naturaleza de la operación definida sobre el conjunto, salvo la que damos o exigimos en los axiomas. No nos interesa pues si se trata de una suma, producto o cualquier otra cosa. Lo único que nos permite asociarle a "algo" el nombre de operación es que este "algo" nos proporcione un criterio mediante el cual, a cada par de elementos de un conjunto podamos asignarle un único y bien determinado elemento de ese mismo conjunto. Dicho con otras palabras, nos interesa únicamente el carácter de "aplicación" o "función" de la operación.

Las ventajas de este sistema no escapan ahora a nuestra vista. Al estudiar la estructura llamada grupo, se estudian entonces simultáneamente todos aquellos conjuntos que sean ejemplos de esta estructura, o sea, ganamos información sobre los números enteros dotados de la operación suma, de los números racionales dotados de la operación producto, de las permutaciones de n elementos y sus composiciones, etc. Desde luego, el conocimiento ganado simultáneamente sobre todos estos conjuntos se basa en que constituyen un grupo, quedando desde luego por fuera todas aquellas propiedades que no tengan conexión con esta estructura algebraica. Este hecho fue el que le dio a esta estructura su gran popularidad ya que encontró, por ejemplo, un gran número de aplicaciones en la Física, al punto que se llegó a afirmar que ésta sufría una enfermedad de grupos ("Gruppentheoretische Krankheit der Physik"). Naturalmente, junto con esta estructura, aparecieron también otras tales como anillos, campos, espacios vectoriales, módulos, etc. Algunas de ellas, como los espacios vectoriales por ejemplo, encontraron aplicaciones fuera de las Matemáticas. Otras (anillos, módulos) tuvieron interés casi exclusivamente para el matemático. Pronto alcanzó la entonces llamada "Algebra Moderna" su apogeo. Gran número de matemáticos se dedican a agotar sus posibilidades (teoremas). Pasada la época creadora, la etapa innovadora, comienza entonces el trabajo de los obreros de las Matemáticas que se dedican a perfeccionar los detalles, a llenar pequeños huecos, a agregar pequeños resultados. Aquí se detiene el fluir creador y comienza el fluir anodino.

Dichosamente, sin embargo, algunos matemáticos fueron conscientes de que era posible, no sólo hacer aseveraciones sobre un ejemplo determinado de una determinada estructura algebraica, sino también estudiar propiedades concernientes a *todas* las estructuras algebraicas (y algunas no algebraicas) de un tipo determinado. Era posible, pues, hacer afirmaciones sobre ciertos "conjuntos de conjuntos". Para ilustrar estas ideas, daremos un ejemplo: consideremos el conjunto (clase) *Top* que consta de todos los espacios topológicos (de un determinado tipo, como, por ejemplo, espacios de Hausdorff, compactos, etc.) y de todas las aplicaciones continuas posibles entre ellos. La topología algebraica nos proporciona un método mediante el cual (bajo ciertas circunstancias) a cada elemento (espacio topológico) T de *Top* le podemos hacer corresponder un grupo designado por $H_q(T)$ y llamado el q-avo grupo de homología de T, siendo esta correspondencia tal que para cada dos elementos T y S de *Top* y para cada aplicación continua $\varphi : T \to S$ (hemos dicho que *Top* consta de espacios topológicos y aplicaciones continuas entre ellos) le hace corresponder un g-homomorfismo $\varphi_* : H_q(T) \to H_q(S)$ entre los correspondientes grupos de homología. Este hecho lo podemos ilustrar mediante la figura siguiente:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, ""] & & H_q(T) \arrow[d, "\varphi_*"'] \\ S & \longrightarrow & H_q(S) \end{tikzcd}$$

Colecciones como la mencionada anteriormente, constituidas por "conjuntos de conjuntos" (clases) y cierto tipo de aplicaciones posibles entre ellos y que además satisfacen ciertos axiomas, reciben el nombre de "Categorías" (la definición de categoría se agregará al final de este artículo). Los conjuntos que las integran reciben el nombre de "objetos" y las aplicaciones entre estos objetos que satisfacen los axiomas requeridos reciben el nombre de "morfismos". Nótese que no pedimos ni damos ninguna información sobre la naturaleza de los objetos o sobre la naturaleza de los elementos que componen tales conjuntos. Ejemplos populares de categorías son, además de la colección ya mencionada, "todos los espacios topológicos (objetos) —todas las aplicaciones continuas entre ellos (morfismos)", las colecciones "todos los grupos— todos los g-homomorfismos", "todos los espacios vectoriales sobre un campo dado— todos los e.v.-homomorfismos", "todos los conjuntos — todas las aplicaciones entre ellos", etc.

El ejemplo tratado anteriormente nos ilustra además otro hecho interesante. Nos muestra la existencia de un cierto tipo de aplicación "doble" que a cada espacio topológico le hace corresponder el grupo $H_q(T)$ y que a cada aplicación continua $\varphi : T \to S$ entre espacios topológicos le hace corresponder el g-homomorfismo $\varphi_* : H_q(T) \to H_q(S)$. Este tipo de aplicaciones "dobles" posibles entre dos categorías que establecen correspondencias entre objetos y morfismos de ambas categorías (bajo ciertos axiomas) recibe el nombre de "Functores" (2). Nuestro ejemplo se refiere específicamente al llamado "Functor de homología", que establece una correspondencia entre la categoría *Top* y la categoría *Gr*, cuyos objetos son grupos y cuyos morfismos son g-homomorfismos.

Estos dos nuevos entes matemáticos introducidos cerca de 1940 (Mac Lane, Eilenberg), que nos permiten trabajar con ciertos "conjuntos de conjuntos" y ciertas aplicaciones posibles entre ellos, comienzan a dominar el panorama algebraico "actual". Su ventaja principal, como ya hemos visto en nuestro ejemplo, es que estamos ahora en condiciones de estudiar propiedades, no de un ejemplo determinado de una deter-

---

(2) Nos referimos en este caso a un cierto tipo de functor, llamado "functor covariante". Existen también functores de otro tipo, los llamados "functores contravariantes".

minada estructura algebraica, sino ciertas propiedades de *todas* las estructuras algebraicas de un tipo determinado y de todas las aplicaciones (que cumplan ciertos axiomas) posibles entre ellas. Aun más, debido a que, como ya mencionamos anteriormente, no pedimos información sobre la naturaleza de los objetos que constituyen la categoría, nuestra teoría no se limita pues al estudio de colecciones de estructuras algebraicas, sino que podemos estudiar otras colecciones tales como la ya vista en nuestro ejemplo, o sea, por ejemplo, colecciones de espacios topológicos de cierto tipo. Debido a esto, la introducción de estos dos nuevos entes ha tenido un efecto unificador, no solamente dentro del álgebra, sino también en otros campos de las Matemáticas. Para finalizar, me permitiré agregar la definición axiomática de categoría:

> Una clase K cuyos elementos A, B, C, . . . (que serán denominados "objetos") son tales que a cada par A, B de ellos le corresponde un conjunto que designaremos por Mor (A, B) y cuyos elementos (que designaremos con letras griegas minúsculas α, β, γ, φ, ψ . . .) serán denominados "morfismos", una tal clase se llamará una "categoría" si se cumple además:

I. Los conjuntos "Mor" son disyuntos.

II. Existe una aplicación (composición)

$$\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \rightarrow \mathrm{Mor}(A, C)$$

que al par de morfismos $(\beta, \alpha) \in \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B)$ (en donde $\alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$ y $\beta \in \mathrm{Mor}(B, C)$) le hace corresponder un único morfismo $\beta\,\alpha \in \mathrm{Mor}(A, C)$ y tal que satisface los axiomas siguientes:

a) $(\mu\,\psi)\,\varphi = \mu(\psi\,\varphi)$ para $\varphi \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $\mu \in \mathrm{Mor}(C, D)$

b) Para cada objeto A, B, . . . existe un morfismo, llamado "morfismo identidad" $1_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$, $1_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$, . . . definido por la propiedad siguiente:

$$\alpha\, 1_A = \alpha = 1_B\, \alpha \quad \text{para } \alpha \in \mathrm{Mor}(A, B)$$