Max Chaves

Breve perspectiva de los fundamentos de la mecánica cuántica: el primer centenario

Abstract. *The author surveys the most important ideas in the history of the foundations of quantum physics.*

Resumen. *El autor repasa las ideas más importantes en la historia de los fundamentos de la física cuántica.*

Prólogo

El estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica está bastante de moda estos días, en parte debido a interesantes resultados teóricos a los que se ha llegado en los últimos años y en parte al interés que existe sobre varios temas de naturaleza tecnológica. Algunos físicos piensan que procesos que se consideraban imposibles al no ser locales, sí pueden ocurrir en la naturaleza, tales como comunicación instantánea, teletransportación y otros. También las posibilidades casi ilimitadas que ofrece la computación cuántica han despertado el interés de muchos. Cuánto de esto está correcto y cuánto va a resultar ser especulación sin base real no lo sabremos por algunos años, pero ciertamente son éstos, temas fascinantes.

Hago aquí un repaso de las ideas más importantes en la historia de los fundamentos de la cuántica. He querido darle al artículo una atmósfera más informal, y está escrito con la idea de que sea un entretenimiento. Así, no lo he llenado de referencias ni demostraciones matemáticas. Me he limitado a indicar algunos textos generales importantes en los cuales el lector encontrará listas de referencias y más información. Hago una excepción en la Sección 9, en la cual inserto una breve demostración debido a Bell de su desigualdad. Aquí sí he mantenido una cierta dosis de matemáticas. Se transcribe la versión original de la desigualdad de Bell y su demostración. Si alguien prefiere evitar el formalismo matemático puede simplemente saltarse la sección, pues sus resultados están resumidos en la que sigue, la Conclusión.

He usado el símbolo "≡" con el sentido de "se define como".

1. Kirchhoff reta a los físicos

A finales del siglo antepasado en Heidelberg Gustav Kirchhoff se enfrascó en el siguiente problema que, aunque teórico en su naturaleza, tenía inmediatas aplicaciones prácticas. Supóngase un cuerpo en equilibrio termodinámico con un baño de radiación, y que este cuerpo tiene la propiedad de absorber igualmente radiación a todas las frecuencias. Entonces, ¿de qué es función la potencia de emisión J del cuerpo? A un cuerpo con la propiedad de absorber igualmente bien a todas las frecuencias Kirchhoff lo llamó "negro". Normalmente un cuerpo puede absorber, reflejar, y emitir, pero el cuerpo negro de Kirchhoff sólo puede absorber la radiación que incide sobre él y luego volverla a emitir. Kirchhoff logró el siguiente interesante resultado: la potencia de emisión de un cuerpo negro es solamente función de la frecuencia y la temperatura, y no depende de la naturaleza misma del cuerpo, es decir, no depende de su composición.

Kirchhoff demostró que si E_ν es la energía emitida por un cuerpo por unidad de tiempo y de área a una cierta frecuencia, entonces para un cuerpo negro $E_\nu = J(\nu,T)$, es decir, la potencia de emisión es función exclusiva de la frecuencia de la radiación a emitir y la temperatura del cuerpo. Kirchhoff planteó entonces a los fisicos el siguiente reto: "Es sumamente importante encontrar esta función J. Su determinación experimental es sumamente difícil. Sin embargo, hay cierta justificación en la expectativa de que tenga una forma sencilla, como la tienen todas aquellas funciones que no dependen en las propiedades de los cuerpos individuales, ya familiares para nosotros." Kirchhoff tuvo mucha razón al afirmar que iba a ser difícil encontrar la forma experimental de la J. De hecho ésta no fue hallada hasta 40 años después, en 1900, hace 100 años, por unos equipos experimentales en el Physikalisch Technische Reichsanstalt, en Berlin, que lograron determinar su forma exacta. Parece que Max Planck descubrió su fórmula, expresión algebraica de la curvas experimentales, al atardecer del domingo 7 de octubre de ese mismo año. En la tarde recibió la visita de Heinrich Rubens y su esposa. Rubens, quien era uno de los experimentalistas del Reichanstalt, le mencionó a Planck algunos detalles sobre la forma de la curva de J a baja frecuencia. Esa noche Planck le mandó una tarjeta postal a Rubens con la fórmula que describía los datos correctamente:

$$J = \frac{h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (1)$$

Esta fórmula contiene la constante nueva h postulada *ad hoc* por Planck para poder escribir su fórmula.

En los días siguientes Planck trató de derivar a partir de los principios fundamentales la fórmula que había hallado empíricamente. Con base en un análisis de la densidad de energía de radiación en equilibrio con la materia, representada ésta por un conjunto de osciladores cargados eléctricamente, logró obtener su fórmula, si se aceptaba que la energía de un modo de radiación era dada por la ecuación $\varepsilon=h\nu$, donde h era la misma constante que anteriormente había tenido que introducir y que tiene unidades de energía-tiempo. En su derivación Planck hizo no una, sino *dos* suposiciones revolucionarias. La primera radica en el uso de la fórmula $\varepsilon=h\nu$, para la energía de un modo de radiación. Clásicamente en electromagnetismo la energía de una onda es la integral sobre el volumen de la densidad de energía, que es proporcional a E^2+B^2, donde E y B son, respectivamente, los campos eléctrico y magnético de la onda. ¡La frecuencia ni siquiera entra en la fórmula! La segunda fue al calcular la entropía del sistema al estilo de Boltzmann, tratando a los modos (que eventualmente llegarían a ser llamados fotones) como indistinguibles. Si bien lograr encontrar empíricamente la forma correcta de la potencia de emisión fue un digno logro de Planck, el esfuerzo que le confiere inmortalidad fue precisamente su derivación posterior de su fórmula. Con este trabajo se inicia la aventura humana con la mecánica cuántica.

2. Nadando siempre contra corriente

Fue el destino de Albert Einstein sustentar toda su vida la opinión de la minoría acerca de la mecánica cuántica. En su artículo de marzo de 1905 derivó de nuevo la fórmula de Planck pero no lo hizo partiendo del equilibrio termodinámico de los osciladores con los modos, tal como Planck lo había hecho. Por el contrario Einstein supone la corrección de la fórmula de Wien para el régimen $h\nu >> kT$ y deriva de ahí que la radiación de cuerpo negro es equivalente a un gas de partículas de energía $\varepsilon=h\nu$, que serían los cuantos de luz. El lector apreciará el paso conceptual: el problema no es exactamente el de Planck, sino el de un gas a cierta temperatura en una cavidad cerrada. Además, se comprende a la radiación como compuesta de cuantos. Para terminar Einstein le da un fundamento físico común a la radiación en equilibrio y a la emisión (o absorción) de la luz diciendo que precisamente la interacción de un átomo con la luz ocurre por medio de la emisión (o absorción) de uno de estos cuantos.

En 1887 H. R. Hertz observó que un rayo de luz producía chispas al incidir en superficies de

metal con un voltaje entre ellas. En 1902 Philip Leonard (quien muchos años después se convertiría en enemigo de Einstein) estudió el efecto fotoeléctrico usando un arco de carbón como fuente lumínica. De este modo pudo variar la intensidad de su fuente en un factor de mil. El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones que se produce en una superficie cuando ésta se expone a la iluminación de la luz. Desde un punto de vista clásico los resultados del experimento son anómalos, puesto que se esperaría que la energía cinética del electrón dependiese de la intensidad de la iluminación, pero Leonard demostró que, por el contrario, es totalmente independiente de la intensidad. Por otro lado, realmente el efecto no debiera ni existir, puesto que la energía que pueda suministrar la luz en una área transversal tan pequeña como la de un átomo es insuficiente para poder lograr la emisión de un electrón. Estas paradojas no representaron mayor problema para Einstein, quien ya estaba en posesión de un concepto nuevo, el cuanto de luz. La energía cinética máxima E del electrón tenía que ser dada por $E=h\nu-\phi$, donde esta magnitud ϕ es la función de trabajo, la energía que toma sacar a un electrón de la superficie.

Mientras que otras de las novedosas ideas de Einstein, tales como la Teoría Especial de la Relatividad y la explicación del movimiento Browniano, fueron aceptadas con relativa facilidad, el caso del cuanto de luz mostró a la comunidad científica solidaria y unánime en su oposición a concebir a la luz como paquetitos de energía. No fue hasta mucho después, cuando el proceso de *scattering* (o dispersión) de Compton usando el modelo del cuanto de luz ya había sido verificado experimentalmente y con la perspectiva adicional dada por el formalismo matemático de la nueva mecánica cuántica descubierto en 1925, que esta comunidad con entusiasmo comprendió y acepto la cuantización de la luz.

Ciertamente no es algo tan evidente para nosotros, ahora que ha pasado tanto tiempo, por qué los físicos de esa época pudieron aceptar sin mucho resquemor las teorías de la relatividad especial y general pero inmediatamente considerar al cuanto de luz como el gran error del famoso profesor Einstein. La explicación de Abraham Pais es que tanto para Einstein como para sus contemporáneos, las teorías de la relatividad son extensiones, *continuaciones*, de las mecánicas clásica y celeste, teorías aceptadas completamente. Las aplicaciones de ideas cuánticas por parte de Planck y Einstein a problemas de física estadística, como la radiación de cuerpo negro y el calor específicio de los sólidos, fueron también de fácil aceptación porque no contradecían la intuición que tenían los físicos de la época, que de todos modos para el caso de la física estadística era casi nula. Los artículos de Boltzmann eran largos y oscuros, y Gibbs no era todavía tan conocido. (Estos resultados llegaron a hacerse muy conocidos debido a la monografía sobre los fundamentos de la física estadística escrita por Paul Ehrenfest junto con su esposa, Tatiana, y publicada en Leipzig en 1911.) Por el contrario todos conocían y admiraban las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, y consideraban que la naturaleza ondulatoria de la luz era incuestionable. Veían, en consecuencia, a la idea del cuanto de luz como innecesaria y claramente falsa: todo el mundo sabía que la luz no era corpuscular. Prácticamente no hubo físico de la época que no hiciese alguna declaración manifestando su oposición al cuanto de luz. Ni siquiera Bohr, quien tanto contribuyera al desarrollo de la vieja mecánica cuántica y fuera el descubridor de la cuantización de los niveles del átomo, aceptó esta idea de Einstein por muchos años.

Ahora viene lo irónico. Durante la década de los veinte se establece la mecánica cuántica, y es usada con gran éxito en la explicación y modelaje de una plétora de fenómenos físicos. La gran mayoría de los físicos aceptan completamente el formalismo matemático y su principal andamiaje epistemológico: la interpretación de Copenhagen. Pero Einstein creía firmemente en la causalidad en la física, y resulta que las predicciones de la mecánica cuántica no pasaban de ser estadísticas. Para Einstein una teoría así no podría ser más que algo transitorio: un paso hacia la *verdadera* teoría. Así la postura de Einstein se invierte. Deja de trabajar en los temas estadístico-cuánticos y mantiene una postura básicamente de desconfianza hacia la mecánica cuántica, mientras que los demás físicos aceptan plenamente la

nueva teoría, incluyendo al cuanto de luz de Einstein. Y esta actitud de Einstein se mantiene hasta su muerte en 1955.

3. Una teoría transitoria...

Como vimos, en el efecto fotoeléctrico un rayo de luz al incidir en una superficie metálica producía la emisión de un electrón. La explicación de Einstein para este fenómeno implicaba que toda la energía de la onda quedaba disponible para producir la emisión del électrón. Sin embargo, el área iluminada por una onda tenía un diámetro miles de veces más grande que el de un átomo, por lo que la densidad superficial de energía era nimia y ciertamente la energía que iluminaba el área de un átomo era insuficiente para expulsar al electrón. Peor aún, Leonard había demostrado que el efecto fotoeléctrico ni siquiera dependía de la cantidad de iluminación. Así pues que toda la energía de la onda tiene que estar disponible para expulsar al electrón, de acuerdo con la relación de Einstein. Este se imaginaba que en medio de la onda había un pequeño cuanto de luz que contenía toda la energía de la onda. Ya desde 1905 Einstein se vió atormentado por la siguiente duda, que no atormentaría a otros físicos hasta después de 1925: si la energía la lleva el cuanto de luz, entonces, ¿qué son esos entes extraños, las *ondas,* que ni siquiera acarrean energía ellos mismos pero que están predichos por las ecuaciones de Maxwell y que sin duda existen, como lo demuestran los efectos de interferencia, dispersión y muchos otros?

Hay otro aspecto muy importante que molestó también a Einstein ya desde el principio, adelantándose también en esto a posteriores dolores de cabeza de sus colegas. Muchos de los fenómenos cuánticos tienen un carácter indeterminista que es totalmente intrínseco. Por ejemplo, la desintegración espontánea de un núcleo que tiene cierta vida media es algo muy curioso, pues no se sabe cuándo ni por qué se desintegra, solamente que lo hace y que tiene una vida media que es, estadísticamente hablando, siempre la misma. Este tipo de fenómeno incomodó a la intuición de Einstein. Asimismo, le resultaba incómodo el principio de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ que implica que no se pueden conocer exactamente el valor de la posición y el momentum de una partícula de un modo simultáneo.

La comunidad científica aceptó la nueva mecánica cuántica de 1925 sin ninguna reserva. La teoría cuántica, que siempre había sido para él nada más que una etapa transitoria, de pronto pasó a ser considerada como el dogma ortodoxo. Einstein aclaró una vez que él veía a la teoría cuántica de un modo análogo a como veía a la mecánica clásica de Newton. Era aproximadamente correcta y proporcionaba muchos buenos resultados, pero era solamente un paso intermedio que permitió alcanzar la teoría verdaderamente correcta, la teoría general de la relatividad. A partir de este momento Einstein se dedicó fundamentalmente a construir una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo, que iba a ser la fundamental del mundo e iba a explicar las paradojas de la mecánica cuántica. Sin embargo sí publicó un artículo más sobre el tema de la cuántica, en el cual puso en evidencia una de sus peculiaridades más delicadas.

4. El realismo y la realidad objetiva: la paradoja EPR

A partir de 1925 se fue formando una ortodoxia sobre la formulación e interpretación de la cuántica. Quizá al lector le parecerá extraño mi uso de la palabra "ortodoxia", pero creo que describe correctamente la postura que tomaron la mayoría de los físicos a partir de entonces hasta hace una o dos décadas. Se aceptó como correcta la mecánica cuántica de Born, Heisenberg, Jordan y Schroedinger, y como correcta interpretación de este formalismo a la llamada de Copenhagen, que era sobre todo la del danés Niels Bohr. De acuerdo a esta interpretación, la función de onda era de naturaleza estadística, y servía para asignar probabilidades. Epistemológicamente la posición era positivista: había que restringuirse a medir la magnitudes del proceso experimental, y abstenerse de hacer preguntas, no solamente porque eran innecesarias, sino también porque podían ser causa de confusión: el incauto físico

caía en la trampa de utilizar incorrectamente conceptos clásicos al explicar fenómenos cuánticos. Durante muchos años hubo también, en los Estados Unidos y Europa, un elemento de clara discriminación a aquellos físicos que osaran cuestionar la interpretación de Copenhagen e inclusive, a aquellos que quisieran elucubrar sobre los fundamentos de la cuántica. Un físico joven que quisiera investigar estos temas se exponía seriamente a ser considerado necio o incompetente. Diría que no ha sido hasta hace una o dos décadas que esta actitud empezó a cambiar. Hoy en día se realiza una enorme cantidad de investigación en los aspectos fundamentales de la mecánica cuántica y nadie chista. Pero sigamos con el relato.

En 1935 Einstein publicó un artículo en el *Physical Review* (nunca más publicaría en revistas alemanas) junto con Boris Podolsky y Nathan Rosen, que llamaremos el EPR. A la sazón Einstein estaba recién llegado a Los Estados Unidos e iba a formar parte del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. El Instituto apenas estaba en etapa de formación, y todavía ni siquiera tenía edificios propios. El artículo, titulado "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" (en español: "Puede considerarse completa la descripción mecánico-cuántica de la realidad física?"), tuvo entonces mucha difusión y desde entonces ha sido objeto de controversia en física y filosofía de la ciencia. Einstein ya había expresado oralmente en aquellos años su desaprobación a la interpretación de Copenhagen, pero esta vez estaba diseminando formalmente sus opiniones por medio de un artículo.

El punto que se pretendía demostrar en el EPR era que la mecánica cuántica era necesariamente una descripción incompleta de la realidad. Esta palabra, "realidad", se refiere a lo que en el EPR se llamaba "elemento de realidad" y que es, por definición, una magnitud fisica a la cual se le puede asignar un valor por medio de una medición experimental. Ejemplos de elementos de realidad son el largo de una mesa o el peso de un objeto (aunque siempre va a haber cierta incertidumbre en toda medición, como es normal). El argumento del EPR consistía en mostrar que existían magnitudes físicas que, siendo elementos de realidad, en principio no eran determinables por medio de la leyes de la cuántica. Esto implica que la cuántica no es una descripción completa de la realidad. A la perspectiva de la realidad que postula el EPR se le ha llamado realismo, y lo que éste exige de una teoría física es que todos los elementos de realidad estén contemplados por la teoría. Además exige que la teoría sea *local*, es decir, no debe haber acción a distancia y menos instantánea, sino de acuerdo a los principios de la teoría especial de la relatividad, que dicen que ni la energía ni la información pueden propagarse más rápidamente que la luz. Dentro del contexto de nuestra comprensión actual del mundo físico, parecen hipótesis razonables.

En la mecánica cuántica existen magnitudes que no son medibles simultáneamente de un modo exacto, tales como la posición x y el momentum p de una partícula. En los libros de texto se demuestra que esta imposibilidad es una consecuencia de que los operadores que representan a las magnitudes no conmutan a cero, es decir, usando un sombrerito para denotar al operador correspondiente, que

$$[\hat{x},\hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \neq 0 \qquad (2)$$

La imposibilidad de medir simultáneamente x y p nos indica, según el EPR, que si x y p son simultáneamente *elementos de realidad*, entonces la cuántica no podría ser una descripción completa de la realidad, al no poder predecir magnitudes medibles. Luego el EPR presenta un experimento para el cual es posible demostrar que existen elementos de realidad no predecibles por la cuántica. Supongamos que cierta partícula se desintegra en dos, las cuales salen en direcciones opuestas. Esperamos suficiente tiempo como para que las dos se encuentren tan separadas que si efectuamos mediciones con ellas, no haya suficiente tiempo como para que una señal pueda partir de una e ir hasta la otra antes de que terminemos nuestras mediciones. Sean x_1 y p_1 la posición y el momentum de la partícula 1, x_2 y p_2 de la partícula 2. Como mencionamos no es posible saber exactamente simultáneamente los valores de x_1 y p_1, ni los de x_2 y p_2. Sin embargo el lector puede

verificar que las combinaciones $\hat{X} \equiv \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ y $\hat{P} \equiv \hat{p}_1 - \hat{p}_2$ sí conmutan:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = 0, \qquad (3)$$

y por la tanto son, de acuerdo a la cuántica, simultáneamente medibles. Es decir, la separación entre ambas partículas se puede saber al mismo tiempo que la suma de sus momentums.

Midamos ahora la posición de la partícula 1. Esto determina la posición de la partícula 2 si usamos la relación $x_2 = x_1 - X$, lo que quiere decir que esta posición es un elemento de realidad. Pero igual podríamos haber medido el momentum de la partícula 1, lo que nos permitiría saber el momentum de la partícula 2, ya que $p_2 = P - p_1$, lo que también implica que este momentum es un elemento de realidad. Si recordamos ahora que no puede haberse producido ningún cambio en la partícula 2 debido a la mediciones efectuadas en la 1, vemos que tanto x_2 como p_2 tienen que haber sido elementos de realidad, a pesar de que sabemos que no conmutan. Así, nos vemos obligados a concluir que la mecánica cuántica es una descripción incompleta de la realidad.

Aparecieron varias respuestas al EPR en la literatura, incluyendo una de Niels Bohr que vamos a comentar brevemente. Por lo demás, el rechazo a las ideas del EPR fue universal. Cuenta Banesh Hoffmann que en 1937 o 38 conversó con Einstein acerca de este rechazo, y éste le contó que todos los días le llegaban cartas de físicos explicándole dónde era que su argumento fallaba. Einstein le dijo que le parecía divertido que, aunque todos los científicos estaban convencidos que el argumento EPR estaba mal, todos le daban motivos diferentes para explicar el por qué (Jammer 1974).

La respuesta de Bohr enfatizaba el papel que jugaba el aparato de medición en cualquier experimento. Por ejemplo, escribió, una partícula que pasa por una hendidura adquiere una incertidumbre en su momentum debido solamente a este hecho. El intento de tratar de determinar la posición da una incertidumbre al momentum. Enfatizaba a continuación la inseparable relación que existe siempre entre la parte del sistema físico que se quiera medir y la parte que sirve para hacer la medición, e inclusive llegó a afirmar que la principal diferencia entre las descripciones clásicas y cuánticas radicaba precisamente en la necesidad de discriminar en este último caso cuales van a ser los objetos medidos y cuales los medidores. Además, decía Bohr, en la medición misma hay que utilizar conceptos clásicos, aunque la teoría de fondo que estemos usando sea cuántica. Estos perceptivos y profundos comentarios preparan al lector para lo que parece va a ser una clara y decisiva refutación del EPR. Sin embargo el clímax de la refutación no pasa de ser la siguiente declaración que transcribo: "In fact it is an obvious consequence of the above argumentation that in each experimental arrangement and measuring procedure we have only a free choice of this place within a region where the quantum-mechanical description of the process concerned is effectively equivalent with the classical description." Esta frase me parece vaga tanto física como linguisticamente. *Creo* que lo que está diciendo es que solo podemos hacer mediciones en sitios donde las descripciones cuántica y clásica son equivalentes. Si éste fuera el caso, me parece que está evadiendo la cuestión planteada en el EPR, donde todas las mediciones se están haciendo ciertamente bajo esas condiciones.

En retrospectiva la importancia del EPR radica más en el tipo de investigación que estimuló que en la conclusión a que llegó. Particularmente importantes fueron luego los resultados de John S. Bell, publicados más de treinta años después, e inspirados en parte en el EPR.

5. Von Neumann exorcisa las variables ocultas

En 1932, apenas siete años después del advenimiento de la nueva teoría cuántica, John von Neumann publicó un libro que llegó a tener gran importancia histórica. Se titulaba *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (en español *Los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*). Tal vez debido al gran respeto que los científicos de la época tenían por von Neumann, o por el motivo que fuera, este texto se convirtió en el evangelio de la mecánica cuántica. Von

Neumann había nacido en Budapest en 1903, y era un joven matemático de conocida brillantez. Trabajaba en varias áreas de las matemáticas y su excursión en la física fue tan brillante como todas sus otras investigaciones anteriores. Su libro destacaba por los siguientes motivos. Primero, ponía sobre una base matemática sólida una serie de resultados usados por los físicos sobre una base puramente intuitiva. Segundo, estaba lleno de ideas profundas y originales, tales como la matriz de densidad, una introducción a la teoría de la medida en la cuántica (que involucraba un análisis muy detallado de todo el proceso), una introducción a la lógica cuántica, y muchas otras más. Muchas de estas ideas son áreas de investigación hoy en día. Tercero, en el libro von Neumann había incluido una demostración de la imposibilidad de las variables ocultas en la mecánica cuántica, y esto le cayó como anillo al dedo a la escuela de Copenhagen.

¿Y qué eran estas "variables ocultas" que tanto molestaban a la escuela de Copenhagen? Después del establecimiento de la nueva mecánica cuántica, algunos físicos que no veían con agrado la naturaleza estadística de la cuántica empezaron a pensar que pudiera ser que existieran magnitudes físicas, que llamaron las variables ocultas, que acarrearan la información adicional necesaria para un desarrollo determinista de los sistemas cuánticos con respecto al tiempo. Estas tendrían ciertos valores iniciales, desconocidos para nosotros debido a nuestra ignorancia, y obedecerían posiblemente a algún tipo de ecuación diferencial que involucraría al tiempo. Las variables ocultas exorcisan al demonio de lo estadístico e indeterminado, y la cuántica se vuelve simplemente un formalismo muy conveniente que describe a la realidad de un modo aproximado, pero que no es el correcto en el fondo. ¡Afortunadamente para la escuela de Copenhagen von Neumann había dicho que las variables ocultas no podían existir!

6. Paréntesis: qué son los *ensembles*, y particularmente, el cuántico

Antes de seguir adelante es conveniente primero discutir el concepto de *ensemble*, ciertamente uno de las más útiles de que dispone la física. Un *ensemble* es un conjunto imaginario de copias de un sistema físico. Existen varios tipos diferentes de *ensemble*, dependiendo del uso que se le quiera dar a cada uno. Veamos:

1. En la física estadística *clásica* se consideran usualmente agregados con muchas partículas, y el *ensemble* está formado de *muchas* copias del agregado. Se permite que la energía del sistema tome valores aleatorios. La idea en este caso es que si se escogen al azar elementos del *ensemble* y luego contamos el número de copias que se cogieron para cada valor de la energía, la distribución así obtenida, la llamada canónica, va a representar la observada experimentalmente en el agregado. Esta distribución sirve para calcular las magnitudes termodinámicas tradicionales que son medibles experimentalmente. Como los valores calculados coinciden con los experimentales, se llega a la conclusión de que la mecánica estadística es válida.

2. En la física estadística *cuántica* lo que se consideran como copias del sistema son copias de las posibles funciones de onda del agregado. Los demás pasos mencionados para el caso clásico se repiten igualmente en el caso cuántico.

3. En la mecánica cuántica también se usa un *ensemble*, solo que en este caso es para un sistema compuesto de pocas partículas. Las copias del sistema están matemáticamente representadas por la *misma* función de onda ψ. En cada copia del sistema se realiza la medición del observable deseado. Supongamos que se está midiendo la energía. Entonces el resultado de las mediciones va a ser un conjunto de valores de la energía, uno para cada copia. De acuerdo a los principios de la cuántica, la proporción de casos que se encuentran en el *ensemble* para cada valor de la energía va a ser proporcional al cuadrado del coeficiente que tiene el autoestado de esa misma energía en la expansión de la función de onda del sistema como suma de las autofunciones de energía. El que la *misma* función de onda pueda llevar a mediciones de *diferentes* valores del observable se debe a la naturaleza aleatoria de la cuántica. Dos copias *idénticas* del mismo sistema clásico siempre llevarían a medir los *mismos* valores para los observables del sistema.

7. Los engañosos ensembles sin dispersión

En su demostración de que en la mecánica cuántica no pueden existir las variables ocultas von Neumann recurre precisamente al concepto de *ensemble* cuántico, analizando el proceso de medida de los observables de un sistema. La demostración de von Neumann es muy general y abstracta; para explicarla voy a simplificarla y especializarla un poco, tratando de mantener intactos, al mismo tiempo, el sentido y lógica fundamentales de la misma.

Digamos, para ser específicos, que pensamos medir el valor del espín s_z de una partícula. Podemos suponer entonces un *ensemble* cuántico E, es decir, un montón de copias idénticas del sistema representadas por la misma función de onda Ψ, en el cual vamos a realizar nuestras mediciones. De acuerdo a la cuántica el valor esperado del espín sería $\langle s_z \rangle = \langle \psi | s_z | \psi \rangle$. La demostración de von Neumann es por contradicción: vamos a suponer que existen las variables ocultas, y esto nos llevará eventualmente a una contradicción, lo que demostrará la falsedad de la hipótesis original. Si éstas existen, *entonces es posible escoger a cada miembro del* ensemble *de tal modo que cada una de las variables ocultas tenga el mismo valor para cada miembro del* ensemble. Si ahora midiéramos el valor del espín s_z de cada sistema de E siempre necesariamente obtendríamos el mismo valor, puesto que en cada sistema tenemos las mismas condiciones iniciales en sistemas que se están suponiendo determinísticos. *Ensembles* en que siempre se obtiene exactamente el mismo valor para un observable tienen varianza cero:

$$\Delta s_z^{\,2} \equiv \left\langle \left(s_z - \langle s_x \rangle \right)^2 \right\rangle = 0, \tag{4}$$

y von Neumann llama a estos *ensembles* "de dispersión cero".

Para medir s_z alineamos el aparato detector de espín en la dirección z. En general el espín es un vector $\mathbf{s}=(s_x,s_y,s_z)$ y sus componentes no conmutan entre sí. Es útil definir también una tercera dirección, dada por el vector $\mathbf{n}\equiv(1,0,1)$ y un observable asociado con esa dirección, el $s_n \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = s_x + s_z$. Von Neumann supuso que el valor esperado de este observable es la suma de los valores esperados de los observables de sus sumandos; es decir, que $\langle s_n \rangle = \langle s_x \rangle + \langle s_z \rangle$. Los autovalores posibles son calculables dentro del contexto de la mecánica cuántica, y resulta que son $\pm\sqrt{2}\cdot h/2$. Dividamos a continuación el *ensemble* en tres *subensembles* iguales T_1, T_2, T_3. Con el primero midamos $\langle s_x \rangle$, con el segundo $\langle s_z \rangle$, y con el tercero $\langle s_n \rangle$, alineando en cada caso el detector en la dirección deseada. (No podemos medir $\langle s_x \rangle$ y $\langle s_z \rangle$ en un el mismo *subensemble* pues sus observables, o más bien los respectivos operadores, si uno quiere ser quisquilloso, no conmutan y no pueden ser medidos simultáneamente, por lo cual es necesario usar diferentes *subensembles*.) Si recordamos que el *ensemble* E tiene cero dispersión y que los autovalores de s_x, y s_z son ± 1, entonces concluimos que, forzosamente,

$$\pm 1 \pm 1 = \pm\sqrt{2}, \tag{5}$$

relación que es imposible de satisfacer independientemente de la escogencia de signos. Hemos llegado a la contradicción prometida y concluimos que no pueden existir las variables ocultas.

En 1952 David Bohm y luego en 1960 Louis de Broglie construyeron modelos que usaban variables ocultas y funcionaban como la cuántica, cosa curiosa puesto que se suponía que éstos eran imposibles. No fue hasta más de cuarenta años después de la publicación del libro de von Neumann que el irlandés John Stewart Bell hiciera notar que la demostración de von Neumann no estaba bien. En particular, no es cierto que la ecuación $\langle s_n \rangle = \langle s_x \rangle + \langle s_z \rangle$ sea cierta para un *ensemble* sin dispersión, con lo cual no se puede alcanzar la contradicción, y queda abierta la puerta para las variables ocultas. (Discusiones de este y posteriores intentos de demostrar la imposibilidad de las variables ocultas se hallan en Bell; en Bohm y Hiley; y en Selleri.)

Volvamos un momento al *ensemble* sin dispersión y a las observaciones que hiciera Bell. Con la primera tercera parte del *ensemble* T_1 realizamos la medición de $\langle s_x \rangle$, que se realiza

alineando el aparato detector en la dirección x. En las siguientes mediciones con las otras dos terceras partes lo alineamos en las direcciones z y n. El punto crucial sobre el que llamó Bell la atención es que el valor esperado de la suma de dos observables sea igual a la suma de sus valores esperados es una ley muy especial, y que le es peculiar a los *ensembles* cuánticos completos, no a los *ensembles* sin dispersión, que son apenas un subconjunto de un *ensemble* cuántico normal. Si el lector reflexiona por un momento se dará cuenta de que, por ejemplo, si uno está midiendo el espín en la direcciones x, y y n (alineando el detector consecutivamente en cada una de esas direcciones), no hay ningún motivo por el cual el espín en la dirección n sea la suma de los efectos de alinear el aparato en las direcciones x y luego y. El que esto ocurra es una propiedad muy particular de la cuántica, y estaría relacionada con su naturaleza estocástica. La falacia en el razonamiento de von Neumann proviene de no hacer una distinción adecuada entre los *ensembles* cuánticos y los sin dispersión, que son subconjuntos de los cuánticos. El punto crucial aquí es que un valor esperado no es solamente unos símbolos en una hoja: *es un experimento que hay que realizar.*

8. El realismo versus la mecánica cuántica

Bell también se interesó en el EPR y ahí también hizo profundas contribuciones. Durante una estadía en 1964 en las universidades de Brandeis y Wisconsin escribió un artículo luego publicado en *Physics* titulado "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox". Recordará el lector que, luego de un razonamiento un tanto abstracto, el EPR afirmaba que la mecánica cuántica no podía ser "una descripción completa de la realidad". Bell en ese artículo hizo notar que el EPR implicaba la existencia de variables ocultas. Además, y esto es lo que ha hecho a este artículo tan importante, Bell muestra que en cierto tipo de experimento el realismo predice unas desigualdades que no están de acuerdo con las reglas de cálculo de la cuántica. Hoy en día se han descubierto desigualdades semejantes para varias situaciones experimentales y se les da el nombre genérico de "desigualdades de Bell". En la próxima sección vamos a repasar la desigualdad original de Bell, la que encontró en 1964.

Veamos ahora por qué el EPR implica la existencia de variables ocultas. Supongamos un experimento en el cual una partícula sin espín se desintegra en dos, que llamaremos la A y la B, cada una con espín $\hbar/2$. (Mediremos el espín en unidades de $\hbar/2$ de modo que los espines posibles serán ± 1.) De acuerdo con las reglas de la cuántica, si medimos el espín de la partícula A en la dirección z y da $+1$, entonces el espín que debe tener la B es -1, y viceversa. Antes de realizar la medición esperamos a que las partículas se alejen mucho, y entonces medimos el espín de la A, con lo cual ya sabemos cuanto vale el espín de la B. Pero, ¿cómo es posible que haya ocurrido el colapso de la onda de la B si ésta está muy distante de la A cuando colapsó su función de onda? Las partículas están tan separadas que no hay modo que se comuniquen entre ellas, ni siquiera con la información viajando a la velocidad de la luz.

Si llamamos $\chi_A(+z)$ a la función de onda de la partícula A con espín en la dirección $+z$, $\chi_B(-z)$ a la de la partícula B con espín en la dirección $-z$, etc., entonces la función de onda de dos partículas con un espín total cero, que llamaremos la función antisimétrica, es:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x_A(+z)\chi_B(-z) - \chi_A(-z)\chi_B(+z)\right], \tag{6}$$

donde se han omitido la dependencia en la posición. Si se observa esta expresión se verá que es la superposición de las dos posibilidades: que la partícula A tenga el espín $+1$ y la B el -1, o bien la posibilidad inversa. De acuerdo con las reglas de la cuántica cuando se realiza la medición del espín de la partícula A entonces la función de onda colapsa a $\Psi_1=\chi_A(+z)\chi_B(-z)$ o bien a $\Psi_2=\chi_A(-z)\chi_B(+z)$. Nótese que la función de onda no acarrea ninguna información al respecto: ella contiene a ambas asignaciones de espín. Pero si la función de onda no acarrea ninguna información sobre el espín que va a ser medido en cada partícula, y si las partículas tampoco pueden intercambiarse información entre ellas, entonces, ¿qué es lo que está

pasando? Si suponemos que la postura realista es la correcta, y no aceptamos fuerzas no locales, entonces no queda más que aceptar que las partículas acarrean otra información además de la función de onda, una información que implica que se sepa previamente que cuando se mida el espín de la A va a ser –1 (digamos) y que cuando se mida el espín de la B va a ser +1. Pero esta información adicional son precisamente las variables ocultas. El EPR implica la existencia de variable ocultas.

9. La desigualdad original de Bell y su demostración

Bell criticó la prueba de von Neumann de que no era posible la existencia de las variables ocultas aduciendo que cuando se calcula el valor esperado de la suma de dos observables usando variables ocultas, este valor esperado no tenía por qué ser igual a la suma de los valores esperados de cada observable por separado, tal y como nosotros hemos visto en la Sección 7. El que ocurra así en la cuántica se debe a su peculiar carácter estocástico y lineal. Suponga el lector que queremos medir la vorticidad de un flujo en la dirección x y para ello introducimos algún aparato detector que rota en esa dirección con la vorticidad. Si queremos luego medir la vorticidad en la dirección z apuntamos el aparato en esa dirección. Sin embargo el aparato y sus aspas van a afectar a las corrientes del fluido cuando estamos realizando la medición y, en general, la *medición* de la vorticidad en la dirección $\mathbf{n}=(1,0,1)$ no tiene por qué ser la suma vectorial de los valores *observados* para las vorticidades en las dos direcciones previas.

Bell se preguntó si habría algún modo de rescatar la idea original de von Neumann y tratar de hallar alguna incompatibilidad entre las predicciones de la mecánica cuántica y los valores esperados calculados con variables ocultas. Repasemos algunos conceptos antes de ver qué fue lo que encontró. El valor esperado del espín de la partícula A para el sistema cuántico descrito por la función de onda antisimétrica es $\langle s_z^A \rangle = \psi^* s_z^A \psi = 0$, y físicamente hablando es igual a cero porque hay idéntica probabilidad de que el espín esté hacia arriba o abajo para la partícula A. El valor esperado del espín en la dirección dada por el vector unitario $\mathbf{u}$ es, de acuerdo a la cuántica, $\langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}^A \rangle = \psi^* \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}^A \psi = \mathbf{0}$. Igualmente podríamos estar interesados en el valor esperado del producto de los espines de las partículas, es decir, en su correlación. Para espines en la dirección z se tiene que $\langle s_z^A s_z^B \rangle = \psi^* s_z^A s_z^B \psi = -1$. Por cierto esta correlación tiene que ser igual a –1 pues si el espín de una de las dos partículas está hacia arriba, el de la otra tiene que estar hacia abajo. En general podemos estar interesados en los espines en direcciones arbitrarias dadas por los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$. En ese caso la correlación va a ser

$$\langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}^A \ \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}^B \rangle = \psi^* \mathbf{u}\cdot\mathbf{s}^A \mathbf{w}\cdot\mathbf{s}^B \psi \qquad (7)$$

Supongamos ahora que existen las variables ocultas, de modo que para describir el sistema de las dos partículas son necesarias ciertas variables $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,...\}\equiv\nu$. Entonces todos los posibles estados iniciales del sistema están dados por todos los posibles valores que puedan tomar estas variables. Supongamos que la situación física es tal que algunos estados son más probables que otros, y llamemos a $\rho(\nu)$ la función de distribución de los estados iniciales. Entonces el valor esperado del espín de la partícula A usando variables ocultas está dado por

$$[s^A(\mathbf{u},\nu)]\equiv \int s^A(\mathbf{u},\nu)\rho(\nu)d\nu, \qquad (8)$$

donde $s^A(\mathbf{u},\nu)$ es el valor del espín de la partícula A en la dirección dada por el vector unitario $\mathbf{u}$ y que depende de las variables ocultas ν, el diferencial está dado por $d\nu\equiv d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3...$, los paréntesis cuadrados denotan el valor esperado usando variables ocultas, y hemos supuesto que la distribución esta normalizada, de modo que

$$\int \rho(\nu)d\nu=1 \qquad (9)$$

Debemos tener muy claro que si bien en los valores esperados de la cuántica el observable $s^A\cdot\mathbf{u}$ es una matriz u operador, en los valores esperados con variables ocultas $s^A(\mathbf{u},\nu)$ es simplemente un número y de hecho sólo puede ser +1 ó

–1. La correlación usando variables ocultas en dos direcciones arbitrarias dadas por los vectores unitarios **u** y **w** sería

$$[s^A(\mathbf{u},v)s^B(\mathbf{w},v)]= \int s^A(\mathbf{u},v)s^B(\mathbf{w},v)\rho(v)dv. \quad (10)$$

Practiquemos un poco con este formalismo. El valor esperado del espín en la dirección del vector unitario **u** para la función antisimétrica es cero, es decir, $\langle \mathbf{s}^A \cdot \mathbf{u} \rangle = [\mathbf{s}^A(\mathbf{u},v)] = 0$, lo que nos da una condición sobre la distribución ρ que no nos resulta particularmente útil. Más útil es considerar el valor esperado de las correlaciones de espines en direcciones arbitrarias. En los libros de texto de mecánica cuántica se demuestra que

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}^A \ \mathbf{w} \cdot \mathbf{s}^B \rangle = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (11)$$

Si **u** = **w** entonces la correlación tiene que dar –1, pues los espines de ambas partículas tienen que apuntar en direcciones opuestas. Si los dos vectores unitarios son ortogonales, entonces la correlación tiene que ser cero, puesto que de acuerdo a la cuántica no existe ninguna relación entre los valores de espines ortogonales.

Antes de entrar a discutir la desigualdad de Bell es necesario que demostremos que

$$s^A(\mathbf{u},v) = -s^B(\mathbf{u},v). \quad (12)$$

La demostración es bastante sencilla, si uno recuerda que $\rho(v)$ es siempre una función positiva, y que en consecuencia todos los integrandos de la normalización (9) se están sumando en valor absoluto para dar 1. Además sabemos que $\int s^A(\mathbf{u},v) \ s^B(\mathbf{u},v)\rho(v)dv=-1$, donde $s^A(\mathbf{u},v)$ $s^B(\mathbf{u},v)=\pm 1$. Esto implica que la función $\rho(v)$ en esta integral también tiene que estarse sumando en valor absoluto para poder dar 1. Consecuentemente el producto $s^A(\mathbf{u},v)$ $s^B(\mathbf{u},v)$ solo puede tomar el valor –1 para todo valor de las variables ocultas. Y así llegamos a la ecuación (12).

La ecuación (12) nos permite expresar a la correlación de un nuevo modo:

$$[s^A(\mathbf{u},v)s^B(\mathbf{w},v)]=- \int s^A(\mathbf{u},v)s^A(\mathbf{w},v)\rho(v)dv\equiv[\mathbf{u},\mathbf{w}] \quad (13)$$

Supongamos ahora tres vectores unitarios **a**, **b**, **c**. Entonces, evidentemente,

$$\begin{aligned}[\mathbf{a},\mathbf{b}]-[\mathbf{a},\mathbf{c}]&= - \int(s^A(\mathbf{a},v)s^A(\mathbf{b},v)-s^A(\mathbf{a},v)s^A(\mathbf{c},v))\,\rho(v)\,dv,\\ &= - \int s^A(\mathbf{a},v)s^A(\mathbf{b},v)(1-s^A(\mathbf{b},v)s^A(\mathbf{c},v))\rho(v)dv, \quad (14)\end{aligned}$$

Ahora bien, en este integrando el factor $1-s^A(\mathbf{b},v)s^A(\mathbf{c},v)\rho(v)$ es cero o positivo, y está multiplicado en las distintas áreas de integración a lo sumo por ±1, de donde se deduce que

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]-[\mathbf{a},\mathbf{c}]| \leq \int (1-s^A(\mathbf{b},v)s^A(\mathbf{c},v))\rho\,((v))dv, \quad (15)$$

o, lo que es lo mismo,

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]-[\mathbf{a},\mathbf{c}]| \leq 1+[\mathbf{b},\mathbf{c}] \quad (16)$$

Esta desigualdad fue la que escribió originalmente Bell. Tiene que ser cierta para cualesquiera tres vectores unitarios. Si usamos la forma cuántica del valor esperado (11) tendríamos que $[\mathbf{u},\mathbf{w}]=-\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$. No es difícil darse cuenta de que en estas circunstancias la desigualdad no se cumple para algunas escogencias de los tres vectores. Por ejemplo, tomando $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$ y $\mathbf{c} = \mathbf{k}$ obtenemos $\sqrt{2} \leq 1$, lo cual es falso. En consecuencia concluimos que la mecánica cuántica y el realismo son incompatibles.

10. Conclusión

En la sección anterior mostramos como las correlaciones de los espines de dos partículas con base en el realismo contradicen algunos resultados que predice la mecánica cuántica. Solamente quedan dos opciones lógicas: o la mecánica cuántica en su formulación actual está incorrecta, o bien el mundo no obedece a la concepción realista. Este último caso prácticamente implica que hay interacciones no locales. El que una de estas dos opciones pueda estar incorrecta no deja de ser un tanto preocupante. Actualmente se está tratando de determinar cual es experimentalmente la opción correcta, y posiblemente no pasen muchos años antes de que sepamos la respuesta.

Hemos hecho un recuento de los principales desarrollos conceptuales de los fundamentos de la mecánica cuántica, desde sus principios con Planck y Einstein hasta los resultados de Bell

hace algunos años. Es una historia de difícil lucha por la comprensión del mundo físico. La figura monumental que surge es la de Einstein, uno de los más importantes creadores de la teoría cuántica, y su principal propulsor al principio. Siempre le fueron evidentes tanto la extraordinaria utilidad de la cuántica como sus aspectos oscuros.

Otra figura que surge es la de Bell. A pesar de que trabajaba en *mainstream physics* en CERN, se interesó por estos temas eclécticos. Sin importarle si su nuevo pasatiempo podía resultarle desagradable a algunos de sus colegas, hizo importantes contribuciones al estudio de los fundamentos de la mecánica cuántica.

Los artículos de Bell están impregnados de una ironía sutil, cosa poco frecuente en la física. Dice él en uno de sus *reviews* acerca de algún tema que no era "apropiado" en ese momento: "Este es un relato popular del tema. La gente muy práctica a quien no le interesen los asuntos lógicos no debe leerlo." Ojalá que en ésta y en futuras generaciones de físicos siempre existan aquellos que sí deben leer el *review* de Bell.

Bibliografía

Bell, J. S. (1993) *Speakable and unspeakable in quantum mechanics.* New York: Cambridge University Press. [Una exposición magistral de varios temas modernos sobre los fundamentos y la interpretación de la mecánica cuántica.]

Bohm, D. & B. J. Hiley. (1993) *The Undivided Universe.* Londres: Routledge. [Contiene la versión de Bohm y gran cantidad de información sobre los fundamentos de la cuántica.]

Jammer, M. (1974) *The Philosophy of Quantum Mechanics.* New York: John Wiley & Sons, Inc. [Es un clásico sobre el desarrollo de la comprensión de la mecánica cuántica. Contiene además gran cantidad de información histórica sobre los protagonistas.]

von Neumann. J. (1932) *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Verlag von Julius Springer. [Un clásico que señaló nuevos horizontes y formalizó las matemáticas de la teoría cuántica.]

Pais, A. (1982) *"Subtle is the Lord...", The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford: Oxford University Press. [Una de las mejores biografías sobre la vida de Albert Einstein.]

Selleri, F. (1990) *Quantum Paradoxes and Physical Reality.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. [Una muy detallada exposición de los aspectos epistemológicos de la cuántica.]

Max Chaves
Escuela de Física
Universidad de Costa Rica