Celso Vargas

El concepto de transformación en Leibniz*

Abstract. *In this article we try to clarify the concept of "transformation" as proposed by Leibniz in his "Metaphysical Foundations of Mathematics", published in 1715. As we point out, this concept is directly related to that of "homomorfism". We did not pursue the issue of determining if Leibniz has anticipated other concepts proper of category theory. In the first section, we frame Leibniz effort in a more general conception aimed at giving more coherence to the paper. In this respect, we adopt and take part of the classification introduced by Serres in relation to systematic perspectives present in Leibniz: the analytic and the morfology. The second section is concerned with the analysis of the different meanings of the concept of transformation as used in Leibniz's publication. Finally, in the third section we apply our findings to his conception of physics.*

Resumen. *Este artículo explora el uso del concepto de "transformación" que hace Leibniz en "Metaphysical Foundations of Mathematics" de 1715. Indicaremos que su uso está directamente relacionado con el de homomorfismo. No exploraremos, en este trabajo, otros conceptos propios de lo que actualmente llamamos teoría de categorías. Vemos el esfuerzo de Leibniz como enmarcado en la búsqueda de una visión sistemática más amplia. En este sentido, en la primera sección procuramos darle sentido a la concepción de transformación tomando partido respecto de la clasificación de Serres de los dos sistemas en Leibniz. En la segunda sección, hacemos una lectura del artículo de Leibniz estableciendo los usos del concepto de transformación que podemos encontrar. Finalmente, en la tercera sección aplicamos dicho concepto a su sistema físico.*

En este artículo hacemos una lectura de la publicación (1715) de Leibniz titulada "Fundamentos metafísicos de las matemáticas". Nuestra lectura se centra en dos conceptos: el de homomorfismo y el de transformación. Tratamos de clarificar los distintos usos que hace Leibniz de estos conceptos, y su utilización en su concepción de la física. Uno de los aspectos que nos llama la atención es el carácter sistemático del enfoque de Leibniz. Se tiene la impresión de que Leibniz fue un buscador incesante de una metafísica general que le permitiera ver el conocimiento bajo una perspectiva unificada. Consideramos que los conceptos de homomorfismo y transformación son centrales en esta búsqueda. El artículo se divide en tres secciones. En la primera presentamos, sin discutir, la visión que adoptamos en el artículo. En la segunda sección analizamos los conceptos de homomorfismo y transformación tal y como nos parece encontrarla en la obra citada. En la tercera sección, analizamos su concepción física y la aplicación del concepto de transformación.

1. Perspectiva sistémica leibniziana

Ha propuesto Serres (1992) que en Leibniz encontramos dos concepciones de sistema diferentes cuyas características o perfilamiento se presentan claramente en los siglos siguientes: una analítica y una morfológica. La analítica presenta, entre sus rasgos principales, el "pluralismo, conjuntismo, teoría de las multiplicidades; logicismo, formalismo, teoría de los lenguajes formales y de la deducción; algebrismo, iniciación en conceptos bastante nuevos, aunque en él denominados de manera completamente distinta: aplicación, estructura, teoría de las lenguas vernáculas y de las características bien formadas; diccionarios, en fin, en el sentido de suma y en el sentido de comunicación". Por otro lado, está la concepción morfológica del sistema, la cual significa para este autor, "división inagotable, compacidad, encaje localmente reiterado, replicaciones, continuidad, conjuntos densos por todas partes. Leibniz intuye exactamente lo que es un punto de acumulación, una vecindad –él mismo emplea este término–, un límite. Propone transformaciones continuas, sin hiatos ni saltos o desgarramientos; esboza conexiones..." (Serres, 1992, 54). De acuerdo con la primera perspectiva sistémica, la preocupación de Leibniz se centra en el establecimiento de clasificaciones exhaustivas en los diferentes dominios, mientras que en la segunda se trata de establecer la conexión, establecer simetrías entre los distintos dominios categorizados. Se trata de establecer una perspectiva transversal que conecte los distintos dominios exhaustivamente tipificados. Para citar de nuevo a Serres:

Conjuntos, elementos, relaciones. Música: notas e intervalos son los primeros datos, en el antiguo sistema y diastema, en el Timeo; *combinatoria: notas cualesquiera y variaciones o situaciones recíprocas; álgebra: letras y signos de operaciones; geometría: puntos y posiciones respectivas; lengua: según el nivel en el que se aborde, sonidos y letras, palabras y frases o lenguas mismas si se busca el núcleo adámico, y de nuevo, los sentidos para un signo dado, o las definiciones para un término dividido; teoría: el conjunto de verdades analíticamente finitas o de infinita descomposición; y así sucesivamente. (39)*

No se entrará a cuestionar o legitimar esta distinción entre sistemas que introduce Serres, sino que la adoptaremos metodológicamente con el propósito de realizar el estudio correspondiente al objetivo de este trabajo. Para ello adoptaremos la perspectiva morfológica e insistiremos fuertemente en el concepto de transformación tal y como es introducido por Leibniz en el escrito en cuestión. Se hará referencia complementaria a otros escritos, si fuera necesario, pero siempre en el contexto del escrito mencionado.

2. Homomorfismo y transformación

Leibniz comienza indicando en la obra mencionada, a propósito de las referencias que de Leibniz realizara Wolf, que existe un arte que es más inclusivo que las matemáticas (claramente las de su tiempo), y que denomina "Arte de Análisis" o "Ciencia Combinatoria" y del cual las matemáticas toman sus métodos. Dos ejes fundamentales introduce Leibniz en esta consideración: primero el concepto de similitud (similaridad)-no-similitud (no-similaridad) y el de contemporaneidad-no-contemporaneidad. El primero es la base de una amplia gama de ámbitos de conocimiento y que producen una estructura importante de clasificación y comparación, mientras que el segundo está muy relacionado con el establecimiento de antecedentes y consecuentes, con relaciones causales, de manera que podemos establecer largas cadenas de antecedentes y consecuentes. Sin embargo, ambos están directamente relacionados, o como dice Leibniz: "All existing elements may be thus ordered either by the relation of *contemporaneity* (co-existence) or by that of being *before or after in time* (succession)". Dios es el único que puede visualizar, en una sola perspectiva, en el encadenamiento de todas las cosas, no solamente según el orden de sucesión y conexión causal, sino también la manera como todas las cosas, en un momento determinado, están ubicadas según el orden de coexistencia. Diacronía y sincronía, son los dos elementos constitutivos de esta nueva Ciencia Combinatoria. En el aspecto diacrónico, el énfasis está en el tiempo, como medida de la sucesión y conexión causa-efecto entre las cosas, mientras que en el segundo, pone énfasis en la relación espacial, como medida de co-existencia.

Tanto el espacio como el tiempo, entendidos como se indicó anteriormente, comparten varias características. En primer lugar, en ambos podemos hablar de cercanía (*propinquity*) o lejanía (*remoteness*) en relación con los objetos o eventos que ocurren. En segundo lugar, ambos forman un conjunto de estructuras definidas por un conjunto de operaciones, es decir, tenemos un conjunto de álgebras, según la relación que adoptemos. Leibniz indica como operaciones o relaciones entre elementos: la proximidad, por ejemplo, entre dos puntos, o entre dos eventos de una sucesión. En tercer lugar, el espacio es el resultado del conjunto de relaciones que se dan entre las cosas de manera simultánea. De igual manera, el tiempo emerge como una relación entre eventos bajo la relación de sucesión o de causalidad.

Ahora bien, no existe el espacio absoluto ni el tiempo absoluto, sino que el tiempo y el espacio son modos relacionales, en los que cosas o eventos están siempre relacionados. En este sentido, podemos definir una estructura abstracta $\vartheta = < \Omega, \Re_{\gamma} >$, donde ϑ es claramente la estructura resultante, sea espacial o temporal, según los valores que tome Ω (el dominio sobre el cual aplican las operaciones) y $\Re_{\gamma}$ un conjunto disyunto de relaciones $\Re_{\gamma 1}$, $\Re_{\gamma 2}$, según se trate de relaciones espaciales o temporales. El dominio Ω es también complejo, y se divide, igualmente, en dos conjuntos. El primero de ellos, un conjunto de individuos (sean puntos, segmentos; instantes o intervalos, según el conjunto de operaciones que se aplique), y un conjunto P_i de predicados atribuibles a una clase de entidades. En ambos casos las operaciones asignan a cada instante (punto) o intervalo (segmento), un conjunto de predicados que se reflejan los atributos o nexos causales, según sea el caso, para un individuo determinado.

Realmente, a partir de este conjunto abstracto de operaciones se generan un conjunto muy grande de estructuras concretas, dependiendo de la complejidad y el tipo de relaciones que se establezcan. De esta manera, se capturan los componentes básicos de las estructuras diacrónicas (sucesivas) y sincrónicas (co-existentes). Dependiendo del tipo de relaciones que se definan, se pueden tener diferentes estructuras topológicas y diferentes estructuras temporales. Las primeras según Leibniz delimitadas por operaciones únicamente tridimensionales. En cuanto a las estructuras temporales, resulta claro que el tiempo lineal es únicamente un caso límite, de una complejidad de estructuras temporales que dependerían del tipo de relaciones que se dé entre los eventos (esto es una inferencia de lo anterior y no significa que Leibniz lo haya indicado). En este sentido, dicha estructura abstracta es muy rica en cuanto a las implicaciones concretas (estructuras) que puedan obtenerse.

En la estructura abstracta anterior, se derivan de la definición de conjuntos de propiedades diferentes estructuras temporales y espaciales específicas. En este sentido, no hay reducción de una estructura a otra. Sin embargo, podría ser posible en Leibniz otra manera de presentar las cosas, mediante reducción a un conjunto determinado. Es decir, se debe encontrar el procedimiento o conjunto de principios que nos permitan reducir una estructura a otra. El concepto de transformación podría cumplir esta propiedad. La transformación es un procedimiento de mapeo de una estructura o elemento a otra.

Pero antes de introducir este concepto, hagamos una breve disgresión sobre el concepto de estructura y de elemento. Leibniz habla tanto de elemento como de estructura. Veamos las siguientes referencias:

We say of an element that it is contained *in a determined structure or constitutes an* ingredient *of it, when through the determination of the structure the element is immediately determined without need of further reasoning.*

Claramente Leibniz no contaba con el concepto de "ser miembro de" propio de la teoría de conjuntos. Aun así sigue siendo correcto afirmar que es un término primitivo y que no requiere ninguna justificación adicional. Esto es lo relativo a elementos. En relación con el concepto de estructura, Leibniz utiliza el mismo concepto de "is contained in", con una interpretación claramente en términos de subconjunto o de subsunción. Al respecto dice Leibniz: "A structure which is contained in another homogeneous to it, is called *a part* –the other in which it is contained is called the *whole*".

Para terminar esta disgresión indiquemos que Leibniz, por lo menos en esta publicación, habla de que el "todo es mayor que la parte", indicando que lo que le interesa son las relaciones de ser subconjunto o de estructuras homomórficas. No habla, por tanto, de otro tipo de estructuras como las de homomorfismo inverso e isomorfismo.

Indicamos anteriormente que la pretensión de Leibniz es buscar un procedimiento sistemático de transformar una estructura en otra, de manera que la primera conserve sus propiedades fundamentales. En el caso de Leibniz el criterio para transformar una estructura en otra es mediante homogeneidad. Definiendo esta última como aquella que preserva la propiedad de similitud, en el sentido de la "misma cualidad". Esto lo expresa Leibniz de la siguiente manera: "I generally say also that elements are homogeneous when they can be made similar through a transformation of one into the other".

Leibniz habla de varios procedimientos para transformar una estructura en otra:

1. Encontrando un modo de transformar esa estructura a un subconjunto o subestructura de la nueva estructura. Es decir, pensando siempre en estructuras que cumplen la propiedad de ser homomórficas o simplemente de "ser subconjunto de".

2. Un segundo criterio consistiría en dividir la estructura a transformar en un conjunto de segmentos tales que cada uno de estos constituya un límite común (*common boundary*) a las dos estructuras. Leibniz define "límite común" de la siguiente manera: "By the *common boundaries* of two structures we mean something contained in both, yet without their having a common part". Se trata de encontrar el conjunto de "cortaduras" o "secciones cruzadas" de la primera estructura y de la segunda.

3. Encontrar una transición término a término entre la primera estructura y la segunda por medio de determinado tipo de enlace, de manera que se pueda encontrar un orden, es decir, una operación uno-a-uno que sea unívoca. Señala Leibniz al respecto, "The transition from term to term pursues, furthermore, a definite *order*, insofar as it proceeds through determined connecting links. We may designate this order as a path".

4. Utilizando como procedimiento el criterio de la medida. Leibniz habla de dos tipos de medida: una que el denomina imperfecta y la otra perfecta. El autor nos explica en que consiste cada una de ellas:

There are two kinds of measurement, imperfect and perfect. Imperfect. When we set up a relation of greater and less between two elements even though they are not homogeneous, nor stand in a numerical relation to one another, as when we say that a line is greater than a point, or a surface greater than a line. In this manner Euclid called the tangent angle (made by a curve and a tangent to the curve at a specified point) smaller than the rectilinear angle, although in truth between two such different kinds of construction we can scarcely find any comparison since they are neither homogeneous nor can one lead to the other by any continuous transformation. For the characteristically perfect measurement of homogeneous content the rule required is that we actually cover in a continuous transition form one end-point to the other all the intermediate links.

Es importante, antes de continuar, hacer un breve análisis de estas cuatro estrategias, para ver como se relacionan entre sí.

1. La primera de ellas está basada en el principio leibniziano de que "el todo es mayor que la parte" y agrupa, como indica Leibniz, una serie de criterios prácticos como la enumeración y la comparación, por ejemplo. Como sabemos actualmente, "el todo es mayor que la parte" se aplica únicamente a conjuntos finitos, y es falso para conjuntos infinitos, numerables y no numerables. Por otro lado, este procedimiento, a pesar de ser tan general, implica claramente la co-existencia de los entes sobre los cuales se establece la transformación. Pero debemos distinguir los dos tipos de co-existencia: la que podríamos denominar actual, para objetos perceptibles, como la comparación de un pie con un metro; la otra potencial, en la que las cualidades de los objetos son los que nos permiten establecer dicha propiedad. Por ejemplo, los algoritmos, al igual que los lenguajes formales, pueden ser clasificados de manera jerárquica, en los que se garantiza la inclusión propia.

2-. Un procedimiento similar al segundo procedimiento enumerado por Leibniz jugó un papel muy importante en el siglo XIX en la construcción de los números reales, tal y como fue utilizado por Dedekind en 1872 y 1887. Sin embargo, Leibniz no tenía en mente tal pretensión, y no se puede esperar que en la breve referencia que hace el autor a este procedimiento se pueda concluir mucho. Se señala la relación con Dedekind por denominarse de la misma manera, aunque Dedekind no utiliza el concepto de secciones-cruzadas, pero sin la condición de que "without their having a common part". Este procedimiento es abstracto en el sentido de que hace abstracción de la estructura o conjunto que se trata de transformar y traslada la transformación al establecimiento de un conjunto exhaustivo de "secciones-cruzadas" de ambas estructuras. Si al final no quedan más cortaduras en una estructura, podemos decir, que el procedimiento de transformación es equivalente a dicho conjunto de "secciones-cruzadas". Finalmente, este procedimiento se aplica a muchos dominios, pero sobre todo, a aquellos que son continuos. Este segundo procedimiento puede verse como un mejoramiento del procedimiento anterior y es claramente constructivo. Este método recuerda mucho el del cálculo infinitesimal, pero aplicado a transformar una estructura en otra.

3. El procedimiento tercero es muy específico en el sentido de que se aplica a estructuras discretas más que a continuas. En este sentido, puede verse como un caso particular del procedimiento dos, y es, por tanto, constructivo.

4. Finalmente, el procedimiento cuarto es muy general, al igual que el primero, y puede considerarse como un paso previo, por lo menos como procedimiento, para determinar cuál procedimiento (2 o 3) utilizar en el proceso de transformación. Si se trata de estructuras discretas la transición término a término podría funcionar. Pero si se tratara de un dominio continuo, el procedimiento de las cortaduras podría servir.

Sin embargo, los procedimientos como tales podrían ser de menor interés para Leibniz. En efecto, Leibniz está muy interesado en mostrar que existen principios más generales, y su jerarquización, a partir de los cuales se puede fácilmente ver cómo los sistemas, como los algebraicos, son casos particulares de un arte más general, la Ciencia Combinatoria, pero sobre todo, en el hecho de que no existe contradicción entre los datos, las hipótesis y la razón. Terminemos esta parte del análisis con una cita de Leibniz en la que se pone de manifiesto lo anterior:

Whence in calculation we perceive not only the law of homogeneity but also the law of harmonious correspondence (lex justitiae) *which consists in the fact that the same kinds of relations given in the data or hypothesis of a problem hold correspondingly for similar relations in the results* derived *from the former; to the extend practically permitted by the particular case, the operations of calculation can be manipulated (and formed) with corresponding agreement and uniformity. The proposition holds generally that a definitely governed order within the conditions corresponds to a similar order within the series of things conditioned. From this there results the* Law of Continuity *(...).*

En este sentido, una de las preocupaciones de Leibniz es establecer principios generales que proporcionen una visión sistemática del mundo.

De lo dicho hasta el momento, podemos proponer dos refinamientos de la estructura abstracta presentada anteriormente. La primera de ellas consiste en transformar una estructura en otra por medio de principios, y la segunda, mediante la aplicación de procedimientos. En general, podemos proponer las siguientes, como reformulaciones compatibles con lo expresado hasta ahora.

1. Dadas dos estructuras $\wp$, $\Im$, decimos que $\wp$ es transformada en $\Im$, si y solo si existe un conjunto $\Re$ de principios tales que $\Re(\wp) \subseteq \Im$.

2. Dadas dos estructuras $\wp$, $\Im$, decimos que $\wp$ es transformada en $\Im$, si y solo si existe un conjunto de procedimientos φ tales que $\forall\alpha \in \wp, \exists\beta \in \Im$, que cumple la propiedad $\varphi(\alpha) = \beta$, es decir, $\varphi(\wp) \subseteq \Im$.

Las formulaciones anteriores preservan siempre la propiedad de homomorfismo.

Concluimos, de esta manera, la presentación formal del concepto de transformación, que nos parece inferir de los trabajos de Leibniz.

3. Homomorfismo, transformación y física

Nos interesa analizar dos aspectos en esta sección. En primer lugar, caracterizar, de manera muy general, el enfoque de la física que desarrolló Leibniz. Para esto nos guiaremos principalmente en el trabajo de Garber (1995). En segundo lugar, nos interesa determinar las relaciones que pueden establecerse en el enfoque de la física, y el de homomorfismo y transformación desarrollado en la sección anterior de este trabajo.

3.1. Su concepción de la física

Los logros más significativos de los copernicanos, tanto en el campo de la física como de la astronomía, plantearon la necesidad de reemplazar la física aristotélica –la cual fundamentaba una física para una tierra inmóvil y centro del universo– por una física para una tierra en movimiento. En la parte física y la instrumentación, Galileo jugó un papel fundamental, proporcionando algunas leyes para los cuerpos bajo aceleración (sea constante o uniformemente acelerada), así como su contribución importante del telescopio, instrumento fundamental para la nueva física. Por otro lado, los aportes de Kepler, con sus tres leyes, así como de sus sucesores, marcan el inicio de esta transformación que pronto será colmada con los éxitos de Newton. En relación con el enfoque de Newton, Leibniz toma partido adoptando más bien la visión continental, de lo que será denominado, posteriormente, sobre todo a partir de Bresnel y Faraday, teoría de los campos de fuerza.

Las preocupaciones de Leibniz sobre la física se enmarcan en este contexto. Leibniz se preocupa de asuntos de física prácticamente desde el inicio de su carrera intelectual. Pudo ver el cambio de paradigma (para usar la expresión de Kuhn). Participa activamente en temas físicos durante toda su vida productiva. Cuando inicia sus labores intelectuales había al menos tres posiciones: (1) Todos aquellos que simpatizaban y adoptaban el punto de vista aristotélico, y que defendían la física aristotélica (en Alemania, según indica Belaval existió una escuela de "aristotélicos auténticos" que jugaron un papel importante en el contexto leibniziano); (2) La de los radicales que defendían la construcción de una nueva física sobre bases totalmente nuevas; y (3) Aquellos que mantenían una posición intermedia y continuista entre el pensamiento aristotélico y el moderno. Leibniz defendió siempre una posición continuista. De hecho, este parece ser uno de los grandes retos en el pensamiento de Leibniz: combinar los nuevos desarrollos, en diversos campos, con la perspectiva aristotélica, y quizá, como se ha señalado, con la escolástica.

Leibniz comenzó, como indica Garber, adoptando la posición aristotélica en relación con los objetos físicos, en el sentido de que la explicación de estos debe realizarse de manera cualitativa. Materia y forma, son los criterios fundamentales para dar cuenta de estos. Sin embargo, poco después adoptó la perspectiva mecanicista, la perspectiva según la cual, los objetos físicos pueden ser adecuadamente explicados en términos de tamaño, forma y movimiento. Mantiene el punto de vista de que esta visión es consistente con Aristóteles. El tamaño y la forma pueden ser explicados en términos geométricos, mientras que el movimiento tiene que ser explicado en términos de la colisión entre objetos. Estos tres elementos son fundamentales para comprender la naturaleza de los objetos, y estos tienen diferente importancia según la naturaleza del cuerpo. Uno de los problemas fundamentales consistirá en establecer las leyes que rigen el movimiento, es decir, la colisión entre objetos. Como señala Garber, "la colisión es la única manera en la que el movimiento de un cuerpo puede cambiar naturalmente".

No obstante, pronto se observa en Leibniz un movimiento hacia una concepción de la sustancia en la que se prescinde del tamaño y la forma. Dicha concepción considera que su esencia consiste en la actividad. Ya en sus trabajos *Hypothesis Physica Nova* y *Theoria Motus*

Abstracti, publicadas en 1671, ofrece un planteamiento de este tipo. La teoría abstracta de las colisiones que aparece en la segunda obra mencionada, se hace "calzar" con el comportamiento del movimiento en este mundo por medio de algunas suposiciones relacionadas con el momento de la creación del universo. Sin embargo, parece que Leibniz no encontró una visión consistente de la sustancia. Garber es de otro parecer. Para él se trata de una concepción en dos niveles: por un lado, está el nivel en el que trata de explicar todo en términos de tamaño, forma y movimiento, y por el otro, está un nivel más abstracto, más próximo a su metafísica, y que busca explicar todo objeto corporal en términos de fuerza. Este segundo enfoque se pone de manifiesto en el *Discurso de Metafísica*, en el que afirma:

Although all the particular phenomena of nature can be explained mathematically or mechanically by those who understand them, nevertheless the general principles of corporeal nature and of mechanics itself are more metaphysical than geometrical, and belong to some indivisible forms or natures as the causes of appearences, rather than to corporeal mass of extension. (Citado en Garber, 283)

Una evolución natural de esta perspectiva se expresa en su concepción de las mónadas como entidades de naturaleza inmaterial. En este sentido, se observa a partir del año de 1676 una línea importante de reflexión sobre temas físicos que toma en consideración el tamaño o la masa como parte esencial, tanto de la sustancia corporal como para explicar el movimiento. Se enfrenta, así, con la ley de conservación de la cantidad de movimiento de Descartes. Se trata de determinar las condiciones bajo las cuales la igualdad de causa-efecto se mantiene en el contexto de la colisión de objetos. Pronto llega a darse cuenta de que este principio de igualdad no se mantiene con la ley de Descartes, y la reemplaza en 1678 por la suya propia que define la fuerza (f) como equivalente a masa o volumen (m) por velocidad al cuadrado ($f = mv^2$). Este principio adquiere gran importancia para el pensamiento de Leibniz ya que le permite visualizar de manera concreta un componente de la sustancia que no es reducible a la extensión (forma y tamaño). Este concepto de fuerza adquirirá una gran relevancia metafísica para Leibniz. Esto le permitirá afirmar, para el segundo nivel, que la esencia de un objeto es la fuerza o actividad. De esta manera, los dos niveles descritos por Garber, están indisolublemente ligados el uno al otro. Se pasa del primer nivel al segundo a partir del concepto de fuerza, y del segundo al primero a partir del hecho de que la fuerza se manifesta en la relación del producto masa-velocidad. Estas consideraciones deben hacerse teniendo siempre presente, como señala Capek, que Leibniz pretendía explicaciones mecánicas de los fenómenos de la naturaleza, y esto guarda una relación de continuidad con su visión metafísica del mundo.

En *Specimen Dynamicum* de 1695, Leibniz presenta una teoría paralela a la aristotélica, aunque más inclusiva, basada en el concepto de fuerza. Distingue Leibniz entre dos tipos básicos de fuerzas: las primitivas y las derivadas. Las primitivas se dividen, igualmente, en pasivas y activas, que corresponden respectivamente a los conceptos aristotélicos de materia y forma. Escribe Leibniz en 1702: "Primitive active force, which Aristotle calls first entelechy and one commonly calls the form of a substance, is another natural principle which together with matter or (primitive) passive force, completes a corporeal substance. This substance, of course, is one per se, and not a mere aggregate of many substances, for there is a great difference between an animal, for example, and a flock" (citado en Garber). Sin embargo, como fuerzas tienen otra función importante: resistir la penetración de otro cuerpo y ofrecer resistencia al movimiento. Por otro lado, las fuerzas derivadas se subdividen también en dos: pasivas y activas. Las pasivas corresponden a lo que denomina "fuerzas inertes" y que Leibniz asocia con la aceleración (pensando en casos como las fuerzas centrífugas y las gravitacionales terrestres, que son de algún modo fuerzas potenciales), mientras las activas están asociadas con las causas del movimiento. Las fuerzas derivadas activas y pasivas son el objeto de una nueva ciencia que Leibniz denomina "Dinámica". Un asunto importante es que Leibniz considera las fuerzas derivativas como limitaciones de las fuerzas primitivas a causa de la colisión de un objeto con otros; tienen, además, un carácter accidental y no sustancial.

Para finalizar este apartado, nos interesa mencionar las leyes para la colisión de cuerpos dentro de un sistema determinado. Tres son las leyes fundamentales:

1. La ley de conservación absoluta de la fuerza (*vis* viva), según la cual, en un sistema determinado, la fuerza absoluta se mantiene para colisiones elásticas. Es decir, un sistema en el que los cuerpos están colisionando responde a la ley $f = mv^2$. Esta ley de conservación de la fuerza garantiza que la suma de fuerzas antes y después de la colisión es la misma.

2. La ley de conservación de la velocidad respectiva. Dados dos objetos que se mueven con velocidades v y x antes de la colisión y con velocidades y y z después de la colisión se cumple la siguiente ecuación: $v-y = z-x$, donde velocidad respectiva significa la capacidad de un objeto de actuar sobre otro.

3. La ley de conservación del progreso común. Dados dos objetos A y B, la relación entre la cantidad de la masa por velocidad, antes y después de la colisión, cumple la siguiente ecuación: $m_A v + m_B y = m_A x + m_B z$.

3.2. Homomorfismo, transformación y física

Intentamos establecer el tipo de relaciones que pueden darse entre la presentación de la física de Leibniz, específicamente la parte correspondiente a la dinámica (fuerzas derivadas activa y pasiva), y los conceptos de homomorfismo y transformación presentados anteriormente. Las fuerzas centrífugas y gravitacionales tienen una expresión diferente. La primera está directamente relacionada con la velocidad a la que se desplaza un objeto, mientras que la segunda se sitúa en un valor alrededor de los 9.8 newtons.

Habiendo hecho esta distinción, podemos establecer las siguientes relaciones:

1. Transformación según el resultado de la fuerza. Si aceptamos la propuesta de Garber de la existencia de dos niveles en la descripción leibniziana de la naturaleza, podemos afirmar que en el primer nivel lo que tenemos son descripciones sobre las propiedades de un objeto que se desplaza en un espacio. Hay dos formas de hacerlo. *A)* Conociendo ciertas condiciones iniciales podemos obtener la fuerza, en cada momento, es decir, la fuerza que está actuando sobre ese objeto. De esta manera podemos obtener dos líneas e_1 y e_2 relacionadas por una función, donde la primera indica la velocidad de desplazamiento del objeto y la segunda la fuerza asociada con ese objeto a esa velocidad. Podemos realizar una transformación de la línea e_1 a otra estructura de manera que hagamos homogéneas la estructuras según las definciones sección segunda. Leibniz mismo, en el ensayo de 1715, da este paso. Leibniz define *movimiento como cambio de posición*. Y agrega "The movable is homogenous with extension; for the point is also viewed as movable". Podemos definir la ruta de un objeto en movimiento, como una sucesión de puntos (locus) en el espacio. De igual manera, podemos ver la línea e_2 (asociada con la fuerza), como una paralela a e_1. *B)* La otra forma de ver la transformación es por medio de las secciones cruzadas o cortaduras. Este método de transformación es presentado por Leibniz, y nos limitaremos a citar al autor en este respecto: "Place is the position which the movable object occupies at a fixed instant. The limiting place or boundary of a movable object is therefore given by the cross-section of the path which the boundary prescribes, assuming that the object has a path and does not move in one and the same place". Se define *path* (ruta) como lo hicimos anteriormente.

2. Transformación, por lo que denominamos el método directo. Este consiste en modelar en términos de funciones continuas, y por tanto, estructuras que responden al principio de continuidad, los principales casos de fuerzas (parte dinámica) presentadas anteriormente. Las fuerzas centrífugas, las gravitacionales y del movimiento pueden modelarse bajo parámetros temporales, es decir, estudiando su comportamiento en el tiempo. En este sentido, las fuerzas centrífugas varían en relación

directa a la velocidad del objeto, y se expresa de la siguiente manera: mv^2/R, donde m es la masa, v la velocidad y R es el radio del círculo que puede trazarse respecto a la curva descrita por el objeto. Cuando se modela en el tiempo, la fuerza centrífuga describe una función continua que varía respecto de v. La constante gravitacional, excepto que intervengan otras variables como la aceleración, describe una función continua constante en el tiempo. Finalmente, la fuerza viva o fuerza derivada activa, describe también una función continua que varía en función de v, para un objeto determinado. Lo anterior quiere decir que podemos modelar los casos anteriores mediante integrales indefinidas, en este caso.

3. Transformación por principios. Esta consiste en ver el movimiento como un caso particular de la ley de continuidad. Leibniz lo ve de esta manera. Permítasenos de nuevo citar a Leibniz al respecto. La ley de continuidad, "first formulated by me, by virtue of which the law of bodies at rest is in a certain sense only a special case of the universal rule for moving bodies, the law for equility is in a certain sense a case of the law of inequility, the law of curves is likewise a subspecies of the law of straight lines". Más específicamente, "*continuity* is present in time as well as in extension, in qualities as well as in motions; above all, however, it lurks in *every process in Nature*, since such a process never takes place by sudden jumps". Como puede observarse, se hace similar haciéndolo derivar de un principio que Leibniz considera fundamental en la naturaleza, el de continuidad, y aplica, por tanto, el procedimiento descrito en la sección tercera pero que se reproduce aquí, a saber: Dadas dos estructuras $\wp$, $\Im$, decimos que $\wp$ es transformada en $\Im$, si y solo si existe un conjunto $\Re$ de principios tales que $\Re(\wp) \subseteq \Im$. En este caso, la estructura a la cual se transforma puede ser cualquiera de las indicadas: tiempo o extensión.

4. Transformación por principios, una variante. Esta cuarta forma de transformación es mucho más compleja que la anterior, ya que requiere tomar en consideración no solamente los aspectos relativos al movimiento, sino las propiedades mismas del sistema. La discusión que mantuvo Leibniz con los cartesianos en relación con las leyes cartesianas del impacto, se basa en la siguiente premisa: en un sistema elástico (que admite que los cuerpos reboten) debe garantizarse que a nivel del sistema como un todo, la fuerza o energía total del sistema se conserve constante. Expresado de otra manera, la fuerza presente en los cuerpos antes y después de la colisión debe ser igual, así como la de todo el sistema. De este supuesto, Leibniz no solamente deriva la fuerza inerte, sino la expresión para la *vis* viva. Igualmente, deriva las dos leyes de conservación tanto del momento como de la velocidad respectiva. Según algunos autores, como Capek, ésta es la justificación para la introducción de la fuerza o energía potencial. Se debe diferenciar claramente ésta de la energía gravitacional o centrífuga. En este momento, la energía o fuerza potencial se define de la siguiente manera: $V_E = \frac{1}{2} kx^2$, donde V_E indica la energía (fuerza) potencial elástica, k es la constante de proporcionalidad y x es la unidad de elongación (que se expresa en diferentes unidades). De lo anterior resulta claro que las características del sistema de colisiones elásticas propuesto por Leibniz, deriva de un principio fundamental: la conservación de la fuerza absoluta de un sistema. Ahora bien, con propósitos de transformación es importante analizar el estatus del principio de conservación de fuerza. Se pueden visualizar tres alternativas. A) Que sea un caso particular del principio de continuidad, aplicado en este caso, al campo de la dinámica. En ese caso, es subsumible bajo este principio general, y por tanto, cumple con la propiedad de que el todo es mayor que la parte. B) Que es un principio complementario al de continuidad, en cuya caso, se debe agregar a los principios enumerados por Leibniz, de manera que completen la visión leibniziana capturada en términos de principios.

C) Que se trata de un principio específico aplicable únicamente a la física, y por tanto, la transformación, en el sentido que nos interesa, tendría un carácter parcial. En relación con estas alternativas, Leibniz en su ensayo "On the Principle of Continuity" (1702), analiza los alcances de este principio, de manera que podemos lograr algún nivel de claridad en relación con estas tres alternativas. Leibniz, en ese ensayo, discutiendo la validez general del principio de continuidad, establece lo siguiente:

Also it happens to be the case that we do no find a single natural event which belies this great Principle; on the contrary, all those events we do know exactly justify the principle perfectly. It has been recognized that the Laws of Collision of Bodies left to us by Descartes are false; but I can show that they are false because they would allow hiatuses in events by violating the Law of Continuity, and that as soon as we make the corrections which restore that Law, we come upon those very laws which Messrs. Huyghens and Wren have found and which experiments have confirmed.

De esta manera, podemos concluir que, de acuerdo con Leibniz, la relación que se mantiene en cuanto al principio de conservación de la fuerza en un sistema y el principio de continuidad es el descrito en la primera de las opciones consideradas, es decir, que es subsumible bajo ese principio más general y bajo la relación "todo-parte".

Nota

* Deseo expresar mi agradecimiento al profesor Manuel Murillo de la Escuela de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Costa Rica, por la revisión de este artículo y por sus valiosas sugerencias. Igualmente, deseo expresar un agradecimiento a mi amigo el profesor Mario Alfaro de la Escuela de Ciencias Sociales por su revisión y sugerencias. Finalmente, al Dr. Luis Camacho por sus valiosas observaciones.

Bibliografía

Boyler, C. (1959) *The Concept of Calculus. A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral.* New York: Dover.

Capek, M. (1973) *El impacto filosófico de la física contemporánea.* Madrid: Editorial Tecnos.

Garber, D. (1995) "Leibniz: Physics and Philosophy". *The Cambridge Companion to Leibniz.* Cambridge University Press.

Kline, M. (1980) *Mathematics: The Loss of Certainty.* New York: Oxford University Press.

Leibniz, G. W. (1715) "Metaphysical Foundations of Mathematics". (En Wiener, 1951)

______. (1702) "On the Principle of Continuity". (En Wiener, 1951)

______. (1695) *Specimen Dynamicum.* (En Wiener, 1951)

Serres, M. (1977) *La filosofía alemana de Leibniz a Hegel.* México: Siglo XXI.

Wiener, P. (1951) *Leibniz Selections.* New York: Charles Scribner´s Sons.

Celso Vargas
Escuela de Ciencias Sociales
Instituto Tecnológico de Costa Rica
celvargas@itcr.ac.cr