Celso Vargas

Aproximación a la probabilidad

Abstract. *This paper presents a general description of probability, this vast and fruitful field of mathematics and of philosophy. Here the representational approach of reality is privileged. From it, as discussed, it is clear that both deterministic and probabilistic representations share several features but also differ in essential aspects. The paper ends briefly describing some of the interpretations of probability.*

Key words: *Probability, representational approach, deterministic and probabilistic respresentations.*

Resumen. *Este artículo presenta una descripción general de la probabilidad, este vasto y fecundo campo de las matemáticas y de la investigación filosófica. Se privilegia el enfoque conocido como "representación de la realidad". Desde esta perspectiva, como se discute en el artículo, tanto las representaciones determinísticas como las probabilísticas compartes varias características pero difieren también en aspectos esenciales. El artículo termina describiendo brevemente algunas de las principales interpretaciones de la probabilidad.*

Palabras clave: *Probabilidad, representación de la realidad, representaciones determinísticas y probabilísticas.*

1. Contexto

Los desarrollos teóricos en probabilidad son relativamente recientes comparados con aquellos de las matemáticas en general. En efecto, salvo las excepciones que siempre se encuentran, los primeros enfoques sobre probabilidad se remontan a la segunda mitad del siglo XVII. Adquieren un nuevo impulso en el siglo XIX con Laplace y con el advenimiento de la mecánica estadística, y se convierte en un enfoque dominante en el siglo XX en la investigación científica, en aseguramiento de la calidad y en los desarrollos tecnológicos, en la evaluación de las teorías científicas y en los estudios sobre el desarrollo para mencionar algunos de nuevos campos.

Davis y Hersh (1986) ubican el gran impulso que han recibido las matemáticas en general como la concreción del sueño de Descartes de construir un mundo de acuerdo con las matemáticas. Si seguimos la aproximación de estos autores, podemos afirmar que los desarrollos matemáticos que tuvieron mayor alcance primero fueron referidos a aquellos ámbitos de la realidad o de la idealización matemática que son susceptibles de ser abordados desde una aproximación determinística. Es decir, aquellos ámbitos en los que dadas determinadas condiciones podemos predecir con certeza, el resultado o efecto. Se tiene control de todas las variables intervinientes.

Pero esta aproximación tiene sus límites en aquellos dominios del conocimiento en los que no se puede garantizar la necesidad de la conclusión o de determinados efectos, a partir de las condiciones dadas. Se conoce como modelación estocástica a aquellos ámbitos en los que tenemos que asignar una probabilidad a la ocurrencia de un evento, o a la conclusión obtenida.

En esta exposición seguiremos la siguiente estrategia: vemos la emergencia de los enfoques estocásticos como el resultado del esfuerzo de extender la matematización de la "realidad" en aquellos ámbitos en los que las aproximaciones determinísticas encontraron limitaciones en la modelación. En este sentido, se impone primero una breve caracterización de este proceso de modelación, para pasar analizar aquellos ámbitos en los que la modelación estocástica es propia, para concluir con algunas reflexiones sobre este tipo de modelación.

2. La modelación matemática de la realidad

Uno de los aspectos más intrigantes es que muchos aspectos de la "realidad" puedan ser modelados matemáticamente. Pero lo que es más intrigante aún es que se haya tenido tanto éxito en esta modelación. Que cada día más ámbitos sean susceptibles de ser comprendidos de manera cuantitativa. El ingenio humano parece no conocer límites en este proceso. La capacidad de reducir problemas no lineales en lineales es una de las cosas más extraordinarias. El que se hayan desarrollado métodos heurísticos para aproximar problemas complejos con un gran éxito predictivo es otra faceta del ingenio humano.

Tanto los griegos como Descartes visualizaron un mundo regido por las matemáticas. En el desarrollo de la filosofía y de la ciencia moderna, sin duda, Descartes es el que ha desempeñado un papel fundamental. Podemos expresar el sueño cartesiano como encontrar una relación isomórfica entre la realidad y la representación matemática. Parafraseando a Brown (2001), podemos expresar esto de la siguiente manera: dado D un dominio de "entidades" matemáticas y dado D* un dominio de "entidades" no matemáticas, entonces, una relación H: D → D* es isomórfica si se cumplen las siguientes condiciones:

a) D y D* son numerables
b) El dominio D (H) = D
c) Si R es una relación de orden en D, entonces, existe una R´ en D*, tal que,
   i. Para todo a y b que pertenecen a D y aRb, si y solo si, H(a)R´H(b)
   ii. H(aRb) si y solo si H(a) R´H (b)

Respecto a de esta expectativa cartesiana, dos cambios importantes son introducidos. El primero de ellos, es mantener una relación no de isomorfismo sino de homomorfismo. Es decir, suavizamos un poco más las condiciones anteriormente indicadas de la siguiente manera:

a) D es numerables y D* tiene al menos un subconjunto numerable
b) El dominio D (H) = D
c) Si R es una relación de orden en D, entonces, existe una R´ en D*, tal que,
   iii. Para todo a y b que pertenecen a D y aRb, entonces, H(a)R´H(b)
   iv. H(aRb) entonces, H(a) R´H (b)

La segunda modificación es el abandono de la pretensión de representar toda la "realidad" extensa en términos de una sola representación, y orientar las preferencias hacia la representación de algunos "segmentos de la realidad". Es decir, podemos hacer diferentes representaciones de la "realidad" no necesariamente consistentes una con otra y, si encontramos una forma de unirlas, no nos proporcionan una visión completa. Esto comenzamos a observarlo con claridad a partir de la segunda mitad del siglo XIX.

Directamente relacionado con lo anterior está el hecho de que se haya recurrido a la "mediación de la realidad", mediante una idealización, con el fin de poder expresar sus propiedades principales. El recurso a la idealización también está presente en situaciones estocásticas, y tiene su fundamento en la búsqueda de una mayor generalización de los resultados. En efecto, entre mayor sea la descripción, menor es la prescripción, y por tanto, el poder predictivo. La búsqueda de términos medios es un recurso importante para capturar las asimetrías entre la descripción y la prescripción. Un conjunto importante de propiedades de "medida" son utilizadas en el establecimiento de esta relación homomórfica entre la representación matemática y la realidad. Históricamente, las más importantes han sido la relaciones de "mayor que", "menor que", e "igual a", y sus correspondientes propiedades: reflexibilidad, simetría, asimetría, antisimetría y transitividad. Pero muchas otras relaciones pueden ser derivadas o extendidas para captar aspectos de otros dominios. Por ejemplo, las relaciones de "mayor que" encuentran su contraparte cuando hay medidas de temperaturas, dureza, densidades, etc. Los homomorfismos, pues, suponen que las representaciones matemáticas expresan propiedades de los objetos en la realidad, o en el dominio observacional si lo queremos llamar así.

Ahora bien, todo el periodo que estamos caracterizando, puede ser bien captado en términos del esfuerzo de Leibniz por comprender diferentes ámbitos de la realidad bajo un formalismo abstracto y utilizando el concepto de transformación o similitud, tal y como aparece en su artículo de 1715 "Fundamentos metafísicos de las Matemáticas". En efecto, ahí Leibniz muestra cómo la extensión, la duración, la posición (movimiento) y la cantidad son todas expresiones de un formalismo abstracto (ciencia combinatoria), instanciado en términos de los pares co-contemporaneidad- no contemporaneidad. Una serie de principios generales son aplicados a estos distintos dominios: plenitud, continuidad, composicionalidad y graduación lineal. Como ha señalado Lakatos (1981 versión española), se tienen buenas razones para aceptar que esta visión acompañó los desarrollos matemáticos hasta Cauchy en 1853. No es sino con Weiestrass, con la nueva fundamentación del cálculo, con el que se rompe con algunos de estos principios, en especial, con el de continuidad.

Claramente, dentro de este marco, la relaciones de comparación que hemos mencionado más arriba, "mayor que", "menor que", e "igual a" se aplican a los elementos, diríamos hoy, del conjunto sobre el cual las estamos aplicando, lo cual nos permitiría, por ejemplo, el establecimiento de distintas formas de ordenar los elementos de conjunto según estas relaciones.

Así pues, el determinismo fue el que lideró tanto la investigación teórica como la modelación matemática de diferentes ámbitos de la realidad y marcó esta primera gran etapa de las matemáticas. Lo anterior no significa que aspectos no determinísticos no fueran visualizados durante estos desarrollos. Pero no fueron las aproximaciones dominantes. Encontramos ya en Descartes la utilización de "medidas de probabilidad" al estilo de Popper en la valoración de la promisoriedad de algunas hipótesis sobre la evolución de la tierra y del universo sobre principios mecánicos. Sin embargo, su formulación no es explícita como sí encontramos en el siglo XIX y XX. Analicemos con algún detalle el surgimiento del no determinismo en matemática.

3. La emergencia de la probabilidad

Las investigaciones sobre la probabilidad surgen en aquellos contextos en los que no es fácil o posible establecer las medidas de comparación entre los elementos de un determinado conjunto. Contextos en los que hay incertidumbres, ocurrencias azarosas y aleatoriedad. Es, en este sentido, natural que los desarrollos en este campo sean relativamente tardíos. Se requirió haber avanzado en la modelación de aquellos dominios en los que no se presentan estos problemas o en los que es posible, mediante idealización, eliminar la aleatoriedad y otros factores que afectan la nítida representación matemática.

Sin embargo, Davis and Hersh (1986), citando a Ian Hacking, presenta otras razones por las cuales se retrasa la aparición de teorías con un nivel importante de formalización. Algunas de estas razones de tipo religioso. Por ejemplo, antes del siglo XIX encontramos una fuerte preocupación por el determinismo y el fatalismo, y la atribución de eventos fortuitos a la voluntad de Dios, voluntad insondable y no susceptible, por tanto, de ser investigada y menos representada matemáticamente. Otra razón es la carencia de ejemplos que permitan visualizar con claridad la posibilidad de aplicar métodos matemáticos a estos ámbitos.

Al igual que en el caso del determinismo, se aplica también aquí el homomorfismo pero en un sentido bastante diferente del que hemos descrito. En el caso del determinismo, como hemos mencionado, las distintas relaciones se establecen en los elementos del conjunto de manera que según las relaciones que cumplen sus elementos se pueden obtener diferentes ordenamientos. En el caso de las aproximaciones por probabilidad lo que encontramos son propiedades o relaciones que se establecen a nivel de todo el conjunto y no de sus elementos. Estas propiedades son las que se estiman en términos de ciertas distribuciones, la unión de sus distribuciones nos proporciona el 100 %, o equivalentemente el conjunto universo. En efecto, interesa ver cuál es la distribución de ocurrencia de estos eventos o propiedades en todo ese conjunto. No se puede establecer cuáles individuos específicos cumplirán determinada propiedad, pero sí habrá un subconjunto de ellos que la cumplirán.

En este sentido, dado un conjunto D de individuos, y dado un conjunto E de eventos, a nivel matemático, se establece una correlación con un segundo dominio extra-matemático D* y de Eventos E*, de tal manera que la distribución de eventos E* en el dominio D* se correlaciona (homomórficamente) con la distribución de eventos E en el dominio D.

Sin embargo, en la práctica es usual trabajar a nivel de la modelación matemática, es decir, dando por supuesta la correspondencia con aquel segmento de "realidad" que se está analizando. Es decir, bajo la forma de enunciados probabilísticos numéricos.

La formulación estándar del cálculo de probabilidades es aquella proporcionada por Kolmogorov, en una famosa obra de 1933, titulada **Foundations of the Theory of Probability**. Esta contiene una serie de leyes como las siguientes:

1. Para cualquier evento x de E sobre el dominio D, $0 \leq Pr(x) \leq 1$, es decir, la probabilidad de ese evento (función de probabilidad), puede tener, cualquier rango de valores en el intervalo de los números reales comprendido entre el 0 y el 1. Si toma el valor cero, significa que es falso, que no ocurre, si toma el valor 1 significa que ocurre siempre. Usualmente, se excluyen estos dos extremos. De manera que los valores de verdad lógicas son los extremos de la probabilidad
2. Sea E un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre un conjunto de objetos, e_1, e_2, …, e_i. Entonces, $Pr\ (E) = Pr\ (e_1 \cup e_2 \cup, \ldots, \cup e_i) = \Sigma_{i=1}{}^{n} Pr(e_i) = 1$. Es decir, la suma de las probabilidades de todos los eventos es del 100 %. Esta propiedad es conocida como **normalización**
3. Si un evento U ocurre con certeza, entonces, $Pr\ (U) = 1$
4. La concatenación de la probabilidad de un número finitos de eventos e_1, e_2, …, e_i, es igual al producto de sus probabilidades. $Pr\ (e_1 \cap e_2 \cap, \ldots, \cap e_i) = Pr(e_1) X\ Pr(e_2) X \ldots X\ Pr(e_i)$
5. Probabilidad condicional, la probabilidad de un evento e, dado E, es el producto de sus probabilidades sobre la probabilidad de E, siempre que sea mayor que 0. Es decir, $Pr(e|E) = (Pr(e)*Pr(E))/Pr(E)$.

Desde el punto de vista formal, se trabaja con partes de E, es decir, con el conjunto potencia **P**(E), para lo cual se requiere entonces, donde F es cada uno de los subconjuntos de E. En esta representación, entonces, Pr es una función de F al intervalo de los números reales [0,1]. $<$ E, F, Pr $>$ definen un espacio de probabilidad.

4. Interpretaciones de la probabilidad

Este enfoque presentado constituye la base mínima sobre la cual se reconstruyen y divergen las diversas interpretaciones de la probabilidad, o como señala Hájek, A. (2007) diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad. No todas son compatibles con los axiomas o leyes mencionadas.

1. **La probabilidad clásica**. Inicia con Pascal, Leibniz, Bernoulli y Laplace entre otros y se aplica a dos ámbitos principales: aquellos en los que no tenemos evidencia o aquellos en los que hay evidencia simétricamente balanceada. En el primer caso, la asignación de probabilidades a la ocurrencia de

determinados eventos es subjetiva. En el segundo, se estima la probabilidad de cada una de las ocurrencias tomando en consideración todas las posibilidades simétricamente posibles, o como Keyes dirá según el "principio de indiferencia"

2. **La probabilidad lógica**. Interpreta la probabilidad en términos de la evidencia que apoya uno o varios enunciados. No asume la consideración fuerte de la probabilidad clásica de que la probabilidad se aplica en aquellos casos en los que tenemos evidencia balanceada, sino que se puede aplicar en diferentes circunstancias. La evidencia se asocia principalmente con la confirmación de una hipótesis, que se expresa de la siguiente forma: c(h,e) = m(h&e)/m(e), es decir, la confirmación de la hipótesis h sobre la evidencia e, es igual a medida de probabilidad de h y e sobre la medida de probabilidad de e. Claramente el principal proponente de este enfoque es Carnap
3. **Interpretaciones frecuentistas.** Interpreta la probabilidad en términos de la distribución de un determinado factor, atributo o evento en un conjunto de individuos o de eventos posibles. La frecuencia de un evento relativo a un conjunto total de eventos se expresa como el número de casos favorables entre el número total de casos + 1. Esto se aplica cuando consideramos la distribución de frecuencias sobre un conjunto finito de eventos o individuos. Claramente, puede extenderse para considerar conjuntos infinitos. En este caso, las frecuencias establecen límites (la convergencia de un evento a un determinado valor conforme el número de eventos totales tiende al infinito). Son varios los proponentes de este tipo de enfoques, se cuentan entre ellos Reichenbach y von Mises. Este último autor propone dos de los más famosos axiomas de este enfoque: el axioma de la convergencia: "la limitación de las frecuencias relativas a cualquiera de los atributos existentes" y el axioma de la aleatoridad "la limitación de la frecuencia relativa de cada uno de los atributos en un colectivo □ es el mismo en cualquier subsecuencia infinita de □ que esté determinado por un lugar de selección".
4 **Interpretaciones de la propensión.** El proponente de esta posición es Popper en **Lógica de la Investigación Científica** de 1957. Hay varias interpretación de propensiones, pero puede definir como la probabilidad de una tendencia de producir un determinado resultado dentro de un valor p, es decir, de una frecuencia p. Las propensiones tienden a producir determinadas frecuencias relativas. Tal y como Popper la presenta, las propensiones son susceptibles de ser falsadas al igual que cualquier otra suposición que se haga. En efecto, éstas presuponen ciertas regularidades objetivas, expresadas mediante determinadas frecuencias relativas. Este componente metafísico de las propensiones es uno de los aspectos más debatibles de la teoría.
5. **Probabilidad bayesiana.** A veces también conocida como probabilidad subjetiva mantiene que en las distribuciones de probabilidad que se hace o en la estimación de la evidencia sobre una o más hipótesis siempre hay implícita una valoración anterior. Se prefieren determinadas hipótesis a otras, dependiendo de la concepción del científico o de otros factores subjetivos. En este sentido, lo que pone de manifiesto cualquier distribución de probabilidad hay una función de probabilidad previa que privilegia los juicios de agente que está haciendo la valoración.

El debate sobre el tema de la probabilidad es un tema abierto y realmente apasionante, como quedará de manifiesto en las exposiciones de los participantes en esta mesa redonda.

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. Luis Camacho Naranjo por la lectura de un borrador de este artículo y por sus valiosas observaciones.

Bibliografía

Brown, J. R. "Mathematics, Role in Science". En Newton-Smith compilador (2001); pp-257-264.

Davis and Hersh (1986) *Descartes´ Dream: The World According to Mathematics*. England: Penguim Books.

Hájek, A. (2007) *Interpretations of Probability*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Enciclopedia Virtual.

Kolmogorov, A. N. (1982) "La teoría de probabilidades" en Kolmogorov y otros (1982) *La Matemática: su Contenido, Métodos y Significado*. Vol 2. España: Alianza Editorial.

Lakatos, Imre (1981) *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*. España: Alianza Editorial.

Leibniz (1715) "Metaphysical Foundations of Mathematics". En Wiener (1951); pp. 201-216

Newton-Smith, W.H. Compilador (2001) *A Companion to the Philosophy of Science*. USA: Blackwell Publishing.

Trout, J. D. (2001) "Measurement". En Newton-Smith compilador (2001); pp. 265-276.

Wiener, P. Compilador (1951) Leibniz Selections. New York : Charles Scribner's Sons.