La lógica proposicional en *Analíticos* de Aristóteles

Abstract. *Against the usual attribution of propositional logic to Chrysippus as its founder, it is our contention in this paper that a brief text in Analytics shows that Aristotle already knew the modus ponens, modus tollens and the affirmation of the consequent in a conditional statement. Although he does not name the corresponding rules, his terminology is similar to the one used by the Stoics. Our interpretation of the text fits in with today's propositional logic, without any need to introduce an additional rule with validity problems.*

Key Words: *propositional logic, stoics, Aristotelian logic, modal logic.*

Resumen. *Contra lo que habitualmente se dice, Aristóteles parece haber conocido el modus ponens, el modus tollens y la afirmación del consecuente en un condicional. Aunque no ponga nombres a las reglas correspondientes, un breve texto en Analíticos utiliza terminología semejante a la de Crisipo. En el artículo defendemos que dicho texto se puede interpretar dentro de la lógica proposicional actual, sin necesidad de postular una supuesta regla adicional que tendría problemas formales de validez.*

Palabras claves: *lógica proposicional, estoicos, lógica aristotélica, lógica modal.*

Incluso a simple vista hay una sección en el capítulo 4 del libro II de los *Primeros Analíticos* de Aristóteles que se diferencia claramente del resto. Empieza en 57a36 y llega hasta 57b5. A

diferencia de párrafos previos y posteriores, aquí no aparecen las conocidas variables (letras mayúsculas) que el autor utiliza para designar los términos en los silogismos. Nuestra hipótesis es que la razón para esta diferencia es fácil de captar: en vez de hablar de lógica cuantificada de primer orden, Aristóteles se detiene por un momento a considerar lo que ahora llamamos lógica proposicional, o de conectores o juntos, cuyos comienzos se suelen ubicar en los estoicos y megáricos y particularmente en Crisipo y que es más básica que la lógica cuantificada. Intentamos probar que, aunque el Estagirita no utiliza una terminología propia para los esquemas lógicos que analiza aquí, podemos interpretarlos como equivalentes al *modus ponens*, al *modus tollens* y a la afirmación del consecuente en un condicional filoniano. Evitaremos hablar de implicación material para designar el condicional filoniano, porque como bien se sabe la mal llamada implicación material ni es implicación ni es material. No es implicación porque es estrictamente extensional y no es material justamente porque es formal. Por condicional filoniano entendemos la conectiva cuya tabla de verdad excluye únicamente una posibilidad, la de antecedente verdadero y consecuente falso.

El pasaje 57a-57b ha pasado desapercibido para muchos de los autores más conocidos que han analizado la lógica aristotélica. Tal vez este olvido tenga que ver con los problemas más generales que plantea la lógica de Aristóteles y con la forma como esos problemas afectaron el desarrollo posterior de la lógica. Ocupados con asuntos serios, los estudiosos no se han fijado en

un texto que parece decir algo más amplio de lo que se dice en el resto del capítulo.

El primero de esos problemas es que no existe una lógica aristotélica sino dos, y no es fácil ver cómo se conectan. Fue P. T. Geach, quien en una conferencia en 1968 en la Universidad de Leeds, Inglaterra, lo expresó de la siguiente manera:

La historia de la lógica comienza con Aristóteles, quien pudo decir con orgullo que había escrito el primer tratado de lógica formal. Puedo resumir en una sola frase lo que voy a decir: Aristóteles, como Adán, comenzó bien, pero se extravió pronto por un mal camino, con consecuencias desastrosas para la posteridad. ("Historia de las corrupciones de la lógica", *Themata* (Universidades de Málaga y Sevilla, no.2, 1985, p. 41)

Geach y otros autores después de él han señalado la discrepancia entre *Categorías* y *De la interpretación*, por una parte, y los *Analíticos* por otra. Todos sabemos que en *De la interpretación* el esquema gramatical sujeto-predicado se toma como modelo para el análisis lógico de la proposición y se asume que el nombre propio es sujeto adecuado de la oración. Aristóteles dice que el nombre propio no se puede negar, es intemporal y no se puede intercambiar con el predicado, el cual sí se puede negar y es temporal. Esta dependencia de la lógica respecto de la gramática resultó tan profunda que hubo que esperar hasta el siglo XIX, hasta el *Begriffsschrift* de Frege, para que se eliminara.

Una de las consecuencias de la dependencia de la gramática es el problema de los argumentos con relaciones. Puesto que las oraciones que expresan relaciones no se pueden analizar lógicamente de la misma manera que las no relacionales, el problema de cómo entender en lógica las oraciones de relación y cómo probar la validez o invalidez de los argumentos con relaciones resultó insoluble incluso para Leibniz y tuvo que esperar a los trabajos de Charles Sanders Peirce en EEUU y Ernst Schröder en Alemania a fines del siglo XIX.

Pero lo que Aristóteles dice en *De la interpretación* no tiene continuidad en su silogística de los *Analíticos*. Allí los términos de

las proposiciones cuantificadas se intercambian según reglas y ese intercambio permite buscar la reducción de todas las figuras a la primera, aunque no se logre en todos los casos.

Un segundo problema es que, aunque Aristóteles usa nociones modales con mucha frecuencia en los *Analíticos*, su sistema de operadores modales, expuesto sobre todo en una tabla de oposiciones al final del capítulo 12 y principios del 13 en *De la interpretación*, está lejos de ser coherente y ni siquiera se ponen de acuerdo los traductores en cómo se deben entender las oposiciones que establece entre los operadores "posible", "admisible", "no imposible", "no necesario", "no posible" y "no imposible". La dificultad mayor parece estar en la respuesta a la pregunta de qué es lo opuesto a imposible, si necesario, o posible.

En tercer lugar, Aristóteles desarrolla su teoría de los silogismos claramente como un método de discriminación entre silogismos aceptables y no aceptables, pero no queda claro cuál es el criterio general de validez que le permite distinguirlos, criterio que debería ser suficientemente abstracto como para dar cuenta tanto de los argumentos modales como de los no modales. Reconstruir el sistema o sistemas lógicos usados por Aristóteles en sus variadas obras lógicas, pero sobre todo en los *Analíticos*, es una tarea en la que aún queda mucho por hacer, aunque se podría argüir que es una tarea imposible porque el texto que ha llegado hasta nosotros no da para tanto. Parte del problema es que la validez o invalidez de los silogismos depende de una visión de la predicación que hoy nos resulta difícil de entender.

Aunque en el siglo XIV hubo importantes desarrollos en la lógica, la enseñanza de esta en la Edad Media y siglos posteriores (en algunos lugares hasta mediados del XX) se redujo con frecuencia a la silogística, sin modalidad y con solución casuística de la validez o invalidez. Saber si un silogismo es válido o no, se convirtió en recordar unos versos en latín. Cuando Leibniz formuló un método gráfico para representar los silogismos y decidir automáticamente si eran válidos o no, se encontró con que algunos modos como el Darapti de la tercera figura y el Fresison de la cuarta no encajaban en su método, y aún así los siguió considerando válidos. Su validez se niega cuando George Boole en 1847 matematiza

la lógica cuantificada aristotélica y la reduce a un caso en que el índice de las variables que representan la operación de selección de individuos dentro de una clase se reduce a los valores 0 y 1. La lógica se convierte en el álgebra en la que $x^n = x$ (la famosa "ley del índice") porque los únicos valores que asume el índice es 0 y 1, que representan respectivamente la clase vacía y la clase universal, o también los valores falso y verdadero. Los modos mencionados también resultaron inválidos cuando John Venn introdujo su sistema gráfico para representar los silogismos. Así pues, encontrar un sistema de validez en Aristóteles que dé cuenta tanto de su silogística no modal con *ecthesis* (ejemplificación particular en casos de premisas universales), como de silogismos modales, ha requerido un trabajo notable por sus dificultades y que muchos consideran insoluble por problemas del texto mismo.

Después de sufrir la superficialidad de lo que los neoescolásticos llamaron lógica clásica (en la que toda la lógica se reduce a los silogismos y no existe un principio general y ni siquiera existe una noción clara de validez), Jan Lukasiewicz hizo justicia a la complejidad de la lógica del Estagirita en *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic* (Oxford: Clarendon Press, 1957; traducción al español en Tecnos, 1977). Lukasiewicz analiza los silogismos y, por tanto, la lógica cuantificada tal como aparece en los *Analíticos*, aunque, como es bien conocido, no incorpora los aspectos modales. Aunque Lukasiewicz menciona en esta obra el *modus ponens*, lo atribuye a los estoicos, como es habitual en los historiadores de la lógica, pero no cita el breve texto 57a36-57b5 de los *Primeros Analíticos*. El enfoque de Lukasiewicz es sintáctico y no modal, mientras este texto es semántico y modal.

Fue Storrs McCall quien en 1963 revivió la discusión sobre la lógica modal aristotélica en su obra *Aristotle's Modal Syllogisms* (Amsterdam: North Holland). McCall propuso un sistema para probar validez e invalidez de silogismos modales conocido como LXM. Posteriormente Fred Johnson, profesor en Colorado State University, proporcionó la semántica para un sistema de pruebas de validez e invalidez de silogismos con modalidad en su artículo "Models for Modal Syllogism", publicado en *Notre Dame Journal of*

Formal Logic, volumen 30, número 2, primavera de 1989, pp. 273-284. Pero ni McCall ni Johnson consideran el texto que estamos analizando, por razones obvias: la modalidad la aplican a la lógica cuantificada de primer orden, no a la proposicional. Todavía ellos siguen considerando que la lógica aristotélica se reduce a los famosos modos Barbara, Celarent, Darii, Ferio, etc., que en el sistema XLM genera formas silogísticas nunca antes vistas como la Superbarbara.

En 57a-57b Aristóteles empieza con semántica de argumentos válidos y acaba con términos modales y lo que dice se aplica más claramente a la lógica proposicional que a la cuantificada, pero quienes han expuesto la lógica cuantificada de Aristóteles, con o sin operadores modales, han ignorado las breves consideraciones que hace el Estagirita sobre la relación entre premisas y conclusión de cualquier argumento.

Robin Smith en su artículo sobre la lógica de Aristóteles en el volumen conjunto compilado por Jonathan Barnes bajo el título de *The Cambridge Companion to Aristotle* (1995) tampoco menciona para nada este texto. En la lista de pasajes que aparecen al final del compendio no aparece 57a-57b. Ni lo hace Benson Mates en su breve pero enjundioso resumen de la historia de la lógica en *Lógica matemática elemental*.

Solo hemos encontrado un artículo relacionado con parte de este texto, concretamente con 57b3-5. Se trata de "On Systems Containing Aristotle's Thesis", cuyos autores son R. Routley y H. Montgomery y que aparece en *The Journal of Symbolic Logic*, volumen 33, número 1, marzo 1968. Los autores toman únicamente la frase "(...) es imposible que la misma cosa sea necesitada por el ser y el no ser de la misma cosa" y la traducen al lenguaje simbólico de la siguiente manera, donde la última línea recoge lo dicho en 57b3:

1. $P \rightarrow Q$
2. $\sim P \rightarrow Q$
3. $p \rightarrow q \rightarrow \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
4. $\sim Q \rightarrow \sim P$
5. $\sim Q \rightarrow Q$
6. $\sim \{(P \rightarrow Q) \wedge (\sim P \rightarrow Q)\}$

A la última línea los autores llaman "tesis de Aristóteles" y en el artículo muestran los

problemas de validez que la afectan, por lo que intentan construir un sistema modal con operadores apropiados en el que se pueda acomodar la tesis de Aristóteles. Mientras en la prueba de arriba las líneas 1 y 2 son las premisas, la 3 es una equivalencia bien conocida, que suele llamarse “transposición”. No hace falta incluir esta línea, pues se utiliza aquí para justificar la prueba. Las líneas 4 y 5 son de prueba y la 6 es la conclusión. En la 4 se aplica transposición a la 1 y la 5 se obtiene por transitividad del condicional usando las líneas

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 [(P \rightarrow Q) \wedge (\sim P \rightarrow Q) \wedge (\sim Q \rightarrow \sim P) \wedge ((\sim Q \rightarrow Q) \rightarrow \sim [(P \rightarrow Q) \wedge (\sim P \rightarrow Q)])] \\
 v \quad v \quad f \quad v \quad f \quad f \quad f \quad v \quad v \quad v \quad f \quad v \\
 v \quad f \quad [v \quad v \quad v] \\
 f
 \end{array}$$

Además, el carácter de verdad contingente de la conclusión encaja con nuestras intuiciones habituales. No es difícil encontrar ejemplos en los que un consecuente se desprende tanto de un antecedente como de su negación. “Si sube el precio del petróleo hay crisis, pero si no sube también hay crisis”. En inglés incluso existe una expresión para referirse a estos casos: “damn if you do, damn if you don’t”.

Aquí daremos otra interpretación formal al texto de Aristóteles que evite los problemas de validez, pero para hacerlo empezaremos con 57a36.

Aristóteles empieza el capítulo 4 hablando de la última figura del silogismo después de hablar en el anterior de la segunda figura. Desde el comienzo del capítulo habla en términos semánticos, es decir en términos de *verdadero* y *falso*. De hecho, desde el comienzo del libro II el enfoque es semántico, es decir, se consideran combinaciones de verdadero y falso en premisas y conclusión. Hacia la mitad del capítulo habla de silogismos particulares y dice de ellos que también en este caso se pueden obtener conclusiones verdaderas a partir de premisas falsas. En 57a37 usa el término *argumento* y no el de *silogismo*, lo que indica una perspectiva mucho más amplia. Obviamente todo silogismo es un argumento pero no al revés.

4 y 2. Los autores consideran que el peso de la prueba está en la línea 5, que según ellos Aristóteles considera imposible. Sin embargo, esa línea no es contradictoria en un condicional corriente y no es imposible en un sistema de lógica modal como el S5. De modo que el argumento claramente no es válido, como se puede mostrar por cualquiera de los procedimientos habituales. Podemos lograr que la conclusión sea falsa mientras las premisas son verdaderas, como se ve en la tabla de verdad reducida, a continuación:

Lo que dice a partir de 57a 37 es válido para cualquier cálculo que admita el principio formal de validez:

Así, pues, es manifiesto que, si la conclusión es falsa, necesariamente serán falsas todas o algunas [proposiciones] de las que surge el argumento; en cambio, cuando la conclusión es verdadera, no necesariamente serán verdadera ni alguna ni todas ellas, sino que es posible que, sin ser verdadera ninguna de las cosas que hay en el razonamiento, la conclusión sea igualmente verdadera; pero no necesariamente.

Nótese que aquí Aristóteles no habla de la combinación de términos cuantificados desde el punto de vista de lo que se puede o no predicar de ellos, sino de la **relación entre verdadero y falso**. La tabla de verdad del condicional, la prueba de validez e invalidez por tabla de verdad reducida y la regla formal de validez vienen inmediatamente a la mente cuando se leen las primeras líneas. También lo hace la metáfora de la verdad como propiedad hereditaria: en un argumento válido, si las premisas son verdaderas la conclusión también debe ser verdadera. Por estas razones, este texto se puede analizar así:

- (a) Si la conclusión de un argumento válido es falsa, por lo menos una premisa *debe* ser falsa.
- (b) Si la conclusión es verdadera, las premisas *pueden* ser verdaderas o falsas.

Solo faltaría añadir que la validez excluye la posibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, pero eso se sigue de (a).

El texto que sigue se presenta como explicación de lo anterior:

La razón de ello es que, cuando dos cosas están relacionadas entre sí de manera que cuando la primera es, la segunda debe ser, cuando la segunda no es, tampoco será la primera; pero cuando la segunda es, la primera puede ser y no ser.

En la primera línea tenemos la formulación de un condicional y se usa una terminología (“la primera”, “la segunda”) que recuerda los inde demostrables de Crisipo:

$$p \rightarrow q$$

Sabemos que en un condicional verdadero si se da el antecedente debe darse el consecuente (“dos cosas relacionadas entre sí de manera que cuando la primera es, la segunda debe ser”). Ahora podemos construir el *modus ponens* con solo explicitar lo dicho por Aristóteles y representarlo con símbolos conocidos:

(A) *Modus ponens* (“cuando la primera es, la segunda debe ser”):

$$(1) p \rightarrow q$$

$$(2) p \rightarrow q$$

En el breve texto citado tenemos también el *modus tollens*: “cuando la segunda no es tampoco será la primera”, que representamos de la siguiente manera:

(B) *Modus tollens*:

$$(1) p \rightarrow q$$

$$(2) \sim q \therefore \sim p$$

Hemos visto, pues, lo que ocurre cuando el antecedente (“la primera (cosa)”) es verdadero y cuando al consecuente (“la segunda (cosa)”) es falsa. ¿Qué ocurre cuando el consecuente es verdadero? Tenemos entonces que volver a una frase del texto anterior. Nótese que a continuación no se habla de verdadero o falso, sino de relaciones necesarias o no necesarias entre cosas. Si en vez de “cosas” entendemos “proposiciones” el asunto se aclara mucho más.

(...) cuando la conclusión es verdadera, no es necesario que las premisas sean verdaderas, bien sea alguna o todas, sino que es posible que, sin ser verdadera ninguna de las partes del silogismo, la conclusión sea sin embargo verdadera; pero no necesariamente.

Expresar lo anterior en lógica proposicional parece forzar el texto, que habla de silogismos y conclusión. Pero supongamos que reducimos el argumento a un condicional, como se hace en las pruebas por tabla de verdad reducida. Si, además, prescindimos de operadores modales, tendríamos lo que sigue:

(C) *Afirmación del consecuente en un condicional*:

$$(1) p \rightarrow q$$

$$(2) q \therefore p \vee \sim p$$

Puesto que la conclusión en este argumento es siempre verdadera (es una tautología), el argumento es válido cualquiera que sea el valor del antecedente. De modo que seguimos sin tener problemas de validez en esta interpretación de 57a-57b.

A continuación el texto de *Analíticos* da una explicación ulterior:

Pues es imposible que la misma cosa se de necesariamente, tanto si el mismo factor se predica como si no se predica.

No entendemos estas palabras como si dijeran que no es el caso que de un antecedente y

de su negación se siga el mismo consecuente. Se está hablando de lo que ocurre cuando tiene lugar el consecuente, no de la posibilidad de afirmar el consecuente a partir del antecedente. Podemos suponer que el autor está explicando por qué de la afirmación del consecuente no se puede concluir necesariamente la afirmación del antecedente, pues éste puede darse o no darse. Además, Aristóteles utiliza operadores modales en la explicación. Por esta razón preferimos introducir lógica modal y representar lo dicho de la siguiente manera:

$$(D) (Mp \wedge M \sim p) \rightarrow \sim MLp$$

cuya prueba por árbol semántico en el sistema S5 sería como sigue:

S5

		$(Mp \wedge M \sim p) \rightarrow \sim MLp \checkmark$
		$\sim MLp \checkmark$
w_0	$Mp \wedge M \sim p \checkmark$ Mp $M \sim p \checkmark$ $MLp \checkmark$	
w_1	Lp <hr/> $\sim p \checkmark$ Lp	p
w_2	p	

Empezamos suponiendo que (D) es falso y, por tanto, que su antecedente es verdadero y su consecuente falso. Pero si p es posible, hay por lo menos un mundo posible en que p es verdadero. Si $\sim p$ es posible, hay por lo menos un mundo posible en que p es falso. Por otra parte, si asumimos que es falso que no es posible que p sea necesario (si asumimos que el consecuente es

falso), entonces es verdad que es posible que p es necesario. Entonces hay por lo menos un mundo posible en que es verdad que p es necesario. Ahora pasamos a un mundo posible determinado, w_1 . En este mundo w_1 tenemos Lp . Si p es necesario entonces p es verdadero en todos los mundos posibles y, por tanto, verdadero en w_1 . Esta fórmula bien formada modalmente cerrada sobrevive en cualquier mundo que se haya abierto al despachar otra fórmula, como ocurre en w_2 . Pero si $\sim p$ es verdadero entonces p es falso y, por consiguiente, el árbol semántico se cierra: no podemos suponer que (D) sea un condicional falso y, por consiguiente, es verdadero. El argumento correspondiente es válido.

A lo mismo llegamos si formulamos el texto de la siguiente manera:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \rightarrow M(p \vee \sim p)$$

cuya prueba en S5 por árbol semántico es simple: si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, entonces el consecuente es falso en todos los mundos posibles. Para que eso ocurra tanto p como $\sim p$ tienen que ser falsos, pues se trata de una disyunción.

Pero entonces tenemos p a ambos lados de la línea divisoria, por lo cual el árbol semántico se cierra y la validez del argumento se prueba por semántica en forma indirecta.

Así pues, lo que dice Aristóteles encaja sin mayores problemas en la lógica contemporánea y no nos parece necesario crear un sistema que incluya una regla nueva para entender lo que dice, aunque por supuesto se puede aislar una oración y construir todo un sistema a partir de ella.

Conclusión

Aunque no utilice nombres especiales para los esquemas respectivos, hay indicios de que Aristóteles conoció el *modus ponens*, el *modus tollens* y la afirmación del consecuente, al tratar de explicar la validez semántica de argumentos cuantificados. Además, dio una explicación modal de la validez de ambos y del carácter contingente de la afirmación del consecuente.

Bibliografía

Secundaria

Primaria

Hemos consultado las siguientes versiones en español:

Aristóteles. (1964) *Obras*. (Traducción y notas de Francisco de P. Samaranch). Madrid: Aguilar.

Aristóteles. (1988) *Lógica* (Traducción y notas de Miguel Candel Sanmartín). Madrid: Gredos.

Hemos usado las siguientes versiones en inglés:

Great Books of the Western World (Chicago, etc.: Encyclopedia Britannica, 1952), vol. 8, p. 76-77. (La traducción es de A.J. Jenkinson.)

Past Masters, en versión digital.

Las traducciones de este pasaje son muy semejantes.

Johnson, Fred. (1989) "Models for Modal Syllogism." *Notre Dame Journal of Formal Logic*, volumen 30, número 2, primavera de 1989, pp. 273-284.

Lukasiewicz, Jan. (1957) *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic* (Oxford: Clarendon Press (1977) *La silogística de Aristóteles, desde el punto de vista de la lógica formal moderna*. Madrid: Tecnos.

Mates, Benson. (1970). *Lógica matemática elemental*. Madrid: Tecnos.

Routley, R. Montgomery, H. (1968) "On Systems Containing Aristotle's Thesis". *The Journal of Symbolic Logic*, volumen 33, número 1, marzo 1968, pp. 82-96

Smith, Robin. (1995) "Logic", en Barnes, Jonathan (ed.). *The Cambridge Companion to Aristotle*. Cambridge, Cambridge University Press.