Celso Vargas

El papel del principio de continuidad de Leibniz en el desarrollo del cálculo infinitesimal

Abstract: *This paper explores the hypothesis proposed by Lakatos in the sense that the perspective from which the calculus is understood and formulated by Weierstrass is enterely different from that of Cauchy. According to Lakatos there exist two intrepretations of the calculus: one based in the conception of continuity of Leibniz and the other in the conception of limits offunctions. This distinction is proposed to explain some "mistakes" committed by Cauchy, specifically the proof of the theorem that claims that a continuous series is continuous in all its point, given that he knows the results from Fourier that shows that there exist exceptions to this approach. According to Lakatos is that Cauchy still use the principle of continuity of Leibniz, while Weierstrass introduces a calculus that is not depend on this leibnizian principle.*

Key words: *Lakatos. Weiertrass. Cauchy. Leibniz.*

Resumen: *Este artículo explora la hipótesis de Lakatos de que la perspectiva desde la que el cálculo diferencial e integral es entendido y formulado por Weierstrass muy diferente del de Cauchy. De acuerdo con él, existen dos interpretaciones del cálculo: uno basado en la concepción de Leibniz, específicamente con base en el principio de continuidad y el otro basado en el concepto de límite de una función. Esta distinción se establece para explicar algunos "errores" de Cauchy, especialmente la prueba que afirma que una serie continua es continua en todos sus puntos, sobretodo sabiendo que Fournier había encontrado algunos resultados que eran contrarios a esta afirmación. De acuerdo con Lakatos, Cauchy utiliza como base el principio de continuidad de Leibniz, mientras que Weierstrass elabora una interpretación que no depende de este principio.*

Palabras clave: *Lakatos. Weiertrass. Cauchy. Leibniz.*

0. Introducción

Se considera a Cauchy como el matemático al que le correspondió formalizar el cálculo diferencial e integral como lo conocemos en la actualidad. Desde luego que ningún pensador comienza desde un punto de partida absoluto, sino que, en este caso, hay un importante grupo de matemáticos que hicieron importantes contribuciones orientadas a la clarificación de este importante campo de las matemáticas. Se afirma que fue Cauchy el que "vio el cálculo con nuevos ojos". Esta es la visión de un Bell (1939) y de un Boyer en su famosísima obra de (1959). Sin embargo, como ha señalado Lakatos (1966) esta reconstrucción racional del desarrollo del cálculo deja sin explicar una serie de "errores" que se atribuyen a Cauchy, como la demostración de su famoso teorema de la convergencia uniforme, es decir, de que toda serie continua es continua en todos sus puntos Lo que Lakatos pone de manifiesto, siguiendo un sugerencia de Robinson, es que no hay tales errores, sino que se trata de dos concepciones teóricas diferentes de continuidad. El error que cometen los historiadores es confundir estas dos concepciones del continuo: la leibniziana y de Weierstrass.

En esta ponencia analizamos el principio leibniziano de continuidad y el de Weierstrass procurando clarificar sus diferencias y evaluando la justicia de la afirmación lakatiana de la competencia de dos teorías rivales.

1. Aproximación leibniziana

Como se ha señalado repetidamente, Newton consideró las fluxiones (tasas de variación) y los fluentes (curvas) como directamente ligados a la mecánica. Para él tanto las matemáticas como la teología tienen su fundamento en la mecánica (Buckley, 2003) Este marco general establecía las matemáticas como una disciplina dependiente.

A diferencia de Newton, fue Leibniz el que proporcionó un marco general dentro del cual poder entender los nuevos desarrollos en matemáticas, específicamente, el cálculo infinitesimal como un campo por sí mismo. Dicho marco tuvo tal papel que, mientras en Gran Bretaña se sometía a una severa crítica los fundamentos del cálculo, en el continente, éste gozaba de gran popularidad y aceptación. Los seguidores de Leibniz, como los *Bernoulli*, jugaron un papel fundamental en este proceso de formalización del mismo así como de su divulgación. Todos ellos tuvieron como fondo la visión leibiniziana de continuidad.

Leibniz organizó su perspectiva en términos de un conjunto de principios con diferente nivel de generalidad. Muchos de estos principios mantienen un nivel de interdependencia de manera que puede ser fácil transitar de unos a otros. Entre los principios utilizados por Leibniz encontramos el de plenitud, el de continuidad, el de gradualidad lineal y el de razón suficiente. Leibniz se refirió a estos principios en varias ocasiones explorando diferentes formulaciones y ofreciendo diferentes matices y estableciendo su orden jerárquico. En ocasiones parece como si Leibniz considerara que la armonía universal es una consecuencia de los principios indicados, pero en otras, parece derivar algunos de los principios mencionados del de continuidad y armonía universal. Es probable que las visiones del mundo que derivan de varios modos de jerarquización de principios presenten importantes diferencias. Sin embargo, cualquiera que sea la aproximación que hagamos, él consideró todos estos principios como a priori, en concordancia con visión racionalista. Finalmente, debemos observar que Leibniz introduce otros principios más específicos como el principio general de orden aplicado en las demostraciones en geometría y en las de física.

De acuerdo con el principio de plenitud, el mundo es infinitamente complejo y lleno, "en cada partícula del universo hay contenido un mundo de infinitas criaturas" (citado en Wiener, 1951). Leibniz estuvo profundamente maravillado con los detalles descritos por Leeuwenhoek cuando aplicó el microscopio para analizar lo "infinitamente pequeño". Esto reforzó la idea de Leibniz de que existen infinitas series de criaturas; dichas series puede organizarse en infinitos niveles, desde lo infinitamente grande hasta lo infinitamente pequeño y sus diferentes jerarquías.

De acuerdo con el segundo principio el de continuidad, estas series infinitas que parten de lo infinitamente grande a lo infinitamente pequeño mantiene un nivel de continuidad de manera que pueden ser recorridos en forma progresiva (hacia arriba y hacia abajo) desde cualquier punto de las series que nos ubiquemos. La continuidad es transparente a la razón, aun cuando de facto tengamos algunas limitaciones para realizar tal tránsito.

Directamente relacionado con este principio está el de graduación lineal, es decir, que entre los extremos de las series existe continuidad de manera que no hay saltos en la naturaleza, no hay nichos vacíos en la naturaleza. Leibniz introdujo el concepto de mónada para referirse a cada uno de las "entidades" ubicadas en cada uno de los nichos de la naturaleza de manera que siempre podemos esperar que exista al menos una característica (no necesariamente física, puede ser psicológica) que diferencia a una entidad de otra. Pero esta diferencia es tal que preserva el principio de continuidad.

Viene finalmente, el principio de razón suficiente indica que "nada ocurre sin una razón". Sin embargo, este principio indica más que lo que enuncia. En efecto, este principio nos exige que ponderemos las distintas opciones de explicación. Como señala Leibniz, debemos evitar aquellas explicaciones o razones que sean inestables, debemos siempre esforzarnos por encontramos aquellas razones que pongan de manifiesto la necesidad de la misma hasta donde sea posible. Junto con el principio de contradicción constituye el método que debe ser seguido. Como indica Leibniz (1686), debemos aplicar el método de contradicción de la siguiente manera: debemos considerar siempre la relación sujeto-predicado, de manera que, si encontramos una contradicción, debemos concluir que la razón que queremos buscar es falsa. De otro modo, debemos determinar si hay un proceso de reducción de lo que queremos establecer a la forma del enunciado de identidad "A es A". En el caso en que no encontremos o contradicción o identidad, es decir, en los enunciados contingentes, debemos buscar la razón suficiente en otros aspectos, específicamente, en términos de lo que es bueno, del orden o de la perfección. Debemos suponer, en este sentido, que de todas las posibilidades lógicas Dios escogió aquellas que representaban el mejor mundo posible. Este criterio de escogencia seguido por Dios es una heurística importante para encontrar las razones de los fenómenos bajo consideración.

De la aplicación de estos cuatro principios generales obtenemos una concepción del mundo muy poblada pero bastante coherente. Una visión del mundo en la que todo está interconectado, el presente con el futuro, el futuro con el pasado, el presente con el pasado, lo actual con lo posible, lo posible con lo necesario y el ser con el deber ser. Además existe una relación directa entre esta perspectiva y el enfoque lingüístico propuesto por Leibniz, el "Ars Combinatoria", de manera que podemos considerar que estos cuatro principios le dan sentido a este lenguaje universal. Sin embargo, no es transparente la aplicación de estos principios en las matemáticas, específicamente para la comprensión del cálculo. Por ello, debemos hacer un análisis más detallado, centrándonos, por su relevancia, en el principio de continuidad.

2. El principio de continuidad en matemáticas

En un ensayo publicado por Leibniz en 1715, titulado "Los fundamentos metafísicos de las matemáticas" muestra que las matemáticas son instanciaciones de estos principios generales, es decir, estos dominios las ponen de manifiesto: el espacio, el tiempo y el movimiento, siendo los dos primeros los básicos y el segundo el ámbito privilegiado de la física de su tiempo. Lo que es importante es que estos tres dominios muestran un nivel importante de isomorfismo. El mismo concepto de cantidad puede ser entendido en términos espaciales, temporales o de movimiento. En efecto, hablamos de cantidad para referirnos tanto a la extensión, a la duración como a la posición.

Otras propiedades importantes que comparten estos tres dominios son las siguientes: coexistencia para referirnos a eventos en el mismo espacio o límite espacial, sucesión para referirnos a eventos según la relación de orden de antecedente-consecuente, y adyacencia para referirnos a las posiciones ocupados sucesivamente por un objeto en movimiento. Estas propiedades como puede verse son también presentan un importante grado de isomorfismo.

Para ilustrar el hecho de que los principios de continuidad, plenitud y gradación lineal van más allá de las matemáticas, por lo menos de su tiempo, Leibniz considera la diferencia entre cantidad y cualidad. La cantidad remite a la magnitud, sea esta espacial, temporal o de posición, mientras que la cualidad tiene que ver con las diferencias en las cualidades de los individuos o una especie considerados por sí mismos. Las cualidades constituyen algo así como los atributos fundamentales de un individuo o una especie. Cuando observamos como van variando las cualidades en el orden natural, encontramos una gradualidad progresiva a la cual podemos aplicar las mismas medidas matemáticas: la relación todo-parte, la relación mayor que, menor que, igual que, etc.

O como dice Leibniz, "la continuidad está presente en el tiempo tanto como en el proceso de la naturaleza debido a que ese proceso nunca tiene lugar por saltos repentinos" (pág.

221). Comprender la naturaleza (como lo creado) es encontrar un orden construido a partir de estos principios generales y básicos, y ver como estos adquieren especificidades en diferentes dominios.

En este sentido, afirma Leibniz, una ecuación es un caso particular de la inecuación, el reposo es un caso particular del movimiento y las curvas son un caso particular de las líneas rectas. Debemos interpretar los infinitesimales como el esfuerzo que hacemos por convertir una serie infinita, es decir, una inecuación en una ecuación, donde la graduación lineal pone de manifiesto cierto orden en la serie bajo consideración.

3. La disputa en relación con Cauchy

El principio de continuidad como ha sido expuesto, proporciona una base conceptual para entender los infinitesimales implicados en el nuevo cálculo. En efecto, este principio exige que entre cualesquiera dos fenómenos, conceptos, etc. existe un infinito número de otros fenómenos o conceptos. Así lo expresa Leibniz en una carta enviada a Varignon en 1702: "de acuerdo con mi punto de vista, existe un régimen de continuidad perfecta en el orden sucesivo de las cosas, así hay un orden similar en las cosas simultáneas, que de hecho establecen el pleno como real, y consignan los espacios vacíos al reino de la imaginación. En las cosas que existen simultáneamente debe existir continuidad aun cuando la imaginación percibe únicamente saltos; porque muchas cosas aparecen a nuestros ojos como completamente disímiles y separadas, las cual sin embargo se vuelven perfectamente similares y unidas internamente si pudiéramos conocerlas distintamente". En este sentido, hay una licencia para que podamos suponer la continuidad, aun en aquellos ámbitos, como el caso de los números reales en los que no era fácil en ese momento visualizar la continuidad.

Los infinitesimales requeridos por el cálculo diferencial para establecer las tasas de variación de un proceso son tan reales como sus puntos iniciales, ya se trate de magnitudes infinitamente grandes o infinitamente pequeñas. En efecto, en esa misma carta, Leibniz señala: "la Ley de Continuidad demanda que cuando las determinaciones esenciales de un ente (being) se aproximen a aquellas de otro, como una consecuencia, todas las propiedades del primero deberían también gradualmente aproximarse a aquellas del último". En este sentido, podemos organizar esas variaciones como series cada una de las cuales tiene el mismo nivel de realidad. Autores como Euler, profundamente influenciados por Leibniz, no cuestiona este tipo de principios, aunque sí el de las mónadas, que consideró como un abuso del principio de razón suficiente.

En la formulación moderna del cálculo no aparecen los infinitesimales, sino el concepto de límites. Aun cuando este concepto de límite fue sugerido en las discusiones mantenidas por Newton, Leibniz y otros matemáticos, éste fue entendido en el marco de los otros conceptos de primos y razones últimas, aplicadas a los fluentes o derivadas. El concepto moderno de límite, como señalan Courant y Robbins (1967) puede definirse como la convergencia de una sucesión a_n, "La sucesión a_1, a_2, a_3,... tiene el límite a, cuando n tiende a infinito, sil para todo número positivo ε, por pequeño que sea, existe un entero N (que depende de ε), tal que $| a- a_n | < \varepsilon$ para todo $n \leq N$" (pág. 303). En este sentido, aunque formulado de manera general, el límite adquiere sentido en el contexto de una sucesión específica y es relativa a éste. A ese formulación se le llama "análisis o cálculo estándar" o de "convergencia uniforme". El uso de los límites adquiere significación en el marco de la formulación de los números reales como conjunto en el que una de sus propiedades fundamentales es el de la continuidad, tarea fundamental que realiza Weierstrass.

Tal y como Lakatos lo presenta, el problema se presenta cuando se atribuye a Cauchy la formulación del cálculo diferencial e integral tal y como lo conocemos en la actualidad. Esta posición privilegiada ha sido reconocida por numerosos historiadores de las matemáticas, como ya hemos mencionado. Sin embargo, Lakatos ha cuestionado esta atribución debido a que la explicación estándar deja sin explicar una serie de "errores" cometidos por Cauchy. Claramente, la opinión de Lakatos es que no hay tales errores. Veamos con mayor detalle su análisis.

La explicación estándar todavía asume que el conocimiento matemático es una especie de acumulación de "verdades" de manera que de un momento a otro, todas las piezas calzan dentro del rompecabezas. Esta visión de la historia de la ciencia deja de lado el hecho de que las elaboraciones teóricas se realizan desde diferentes perspectivas, no todas con igual fecundidad. Este es el caso de Cauchy. Realizó sus investigaciones tomando como base el concepto de continuidad dominante en el continente. El concepto leibniziano se había convertido en transparente de manera que no se consideraba necesario ninguna prueba adicional. Valga mencionar que fue Cauchy uno de los primeros en tratar de probar dicho principio desde el punto de vista matemático.

Cauchy prueba algunos teoremas del cálculo (1853) para los cuales había evidencia de que eran falsos o que tenían sus excepciones. Entre ellos, probó que cualquier serie convergente de funciones continuas tiene una función límite continua. Fourier había establecido una serie de funciones (trigonométricas) que no cumplen esta propiedad y Cauchy conocía estos resultados. La conjetura de Lakatos es que Cauchy considero estos resultados como excepciones al principio de continuidad, es decir, que la no convergencia de estos contraejemplos es por que "no pueden converger en sentido propio". Tanto es así, señala Lakatos, que no fue sino Seidel el que corrigió algunos de estos resultados 20 años más tarde.

La opinión de Lakatos es que Abel, años después, "no acertó a descubrir dilema oculto de la convergencia uniforme: por que nunca se liberó del sistema conceptual Leibniz-cauchiano". Lo que ha ocurrido es que los historiadores interpretan a Cauchy con los ojos de Weierstrass que fue el que introdujo de manera rigurosa el concepto de límite en lugar del de los infinitesimales. De esta manera, la única manera de explicar las inconsistencias entre la formulación moderna y la de Cauchy consiste en atribuirla a "errores" cometidos por este último (Lakatos, 1981, 72).

Lakatos formula una hipótesis sobre razones por las cuales la teoría de Leibniz se derrumbó: "se debió a que solo era susceptible de un desarrollo limitado. Fue el potencial heurístico de desarrollo –y la potencia explicativa- de la teoría de Weierstrass lo que produjo el derrumbamiento de los infinitesimales. Los lemas ocultos cruciales que emergieron bajo la presión de la crítica de sus pruebas no eran independientemente contrastables: ello desanimó a los defensores de los infinitesimales, llevó a algunos de ellos, como Cauchy, a creer que los infinitesimales eran admisibles en las pruebas pero no en la formulación de teoremas y, finalmente, los hizo desaparecer durante un siglo de la historia de las matemáticas"(pág. 82).

¿Qué evidencia puede utilizarse para apoyar esta hipótesis?. Lakatos recurre a algunos de los resultados de Robinson en su obra de 1966 titulada *Non Standard Analysis* en el que este matemático construye una teoría "leibniziana" del continuo que permite interpretar los resultados de Cauchy tanto como sus excepciones o "errores". Dicho enfoque es conocido como "análisis no estándar". Aun cuando Lakatos advierte contra los errores historiográficos de reconstruir, según el nuevo corte, la historia obviando las otras perspectivas teóricas que se elaboraron durante toda esa época.

Sin embargo, es interesante insistir en lo que todos ya sabemos: que las presuposiciones teóricas condicionan lo que analizamos, lo que priorizamos, al tiempo que nos "hace ciegos" hacia aquellos aspectos que pueden convertirse en eventuales contraejemplos de la posición adoptada. Esto pone al historiador de la ciencia en un gran dilema: tratar de "ver los hechos" con ojos nuevos, sabiendo que no se puede prescindir de todo el bagaje cultural y de entrenamiento propio de la época en la que le ha correspondido vivir.

Si tomamos como correcto lo que hemos presentado hasta el momento, uno de los aspectos sorprendentes es la persistencia del concepto leibniziano de continuidad que, durante casi dos siglos, exhibió su gran poder heurístico, hasta que surgieron contraejemplos que mostraron sus limitaciones y fue, por tanto, desplazado por una teoría más poderosa, la weierstrassiana. Sin embargo, como Robinson parece mostrar, es posible siempre recuperar una vieja teoría e introducirle algunas modificaciones que la hagan compatible con desarrollos propios del campo, aunque posiblemente se pierda algún nivel de simplicidad en la explicación. Sin embargo, siguiendo a Lakatos no se trata simplemente de recuperar una teoría, sino que mostrar (lo que es más difícil) que el poder heurístico de esta nueva formulación es mayor que el de la teoría estándar, de otro modo, se tratara de un esfuerzo sin ninguna implicación mayor.

Bibliografía

Ball, W.W. R (1960) *A Short Account of the History of Mathematics*. Dover Publications Inc. New York, USA.

Bell. E. T (1939) *Men of Mathematics*. Victor Gollanz, London

Boyer, Carl (1959) *The History of Calculus*. Dover Publications Inc. New York, USA.

Buckley, M. (2003) "El Programa Newtoniano y el Origen del Ateísmo" En Rusell y otros (2003) *Física, Filosofía y Teología: Una búsqueda Común*. Editorial EdaMex, México.

Cohen y Smith (2002) *Cambridge Companion to Newton*. Cambridge University Press.

Courant y Robbins (1967) *¿Qué es la Matemática?* Editorial Aguilar, España

Garber y Ayers (1998) *The Cambridge History of Seventeeth-Centure Philosophy*. Vol. 1. Cambridge University Press.

Hall, R. (2002) *"Newton versus Leibniz: From Geometry to metaphysics"*. En Cohen y Smith (2002), pp.431-454.

Lakatos, Imre (1981) *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*. Alianza Editorial, España.

Leibniz (1715) *"Metaphysical Foundations of Mathematics"*. En Wiener (1951); pp. 201-216

Wiener, P. (1951) *Leibniz Selections*. Charles Scribner's Sons. New Cork, USA.