Rev. Fil. Univ. Costa Rica, XVI (44), 221 - 224, 1978

LA "NADA" EN LAS MATEMATICAS

Enrique Góngora

La "nada" se infiltra en Matemáticas a través del llamado "conjunto vacío". La existencia de este conjunto es ahora demostrable formalmente (1) de tal suerte que su existencia (al menos en Matemáticas) no es cuestionable (2).

Para no entrar en los detalles, bastante técnicos y formales, de esta demostración relativamente reciente, justificaré la existencia del conjunto vacío de un modo bastante natural y usual en Matemáticas, ya que su existencia puede ser justificada del mismo modo que se justifica, p. ej., la existencia de los números enteros negativos; o bien, la existencia del "número imaginario i".

Usemos como punto de partida el conjunto N de los números naturales 0, 1, 2, 3, ... cuya existencia la consideraremos (provisionalmente) dada, siguiendo la célebre postulación de Kronecker:

Die ganzen Zahlen hat Gott geschaffen, alles anderes ist Menschenwerk (3).

Es conocido que sobre este conjunto está definida la operación suma. Así, dados dos números naturales cualesquiera a y b, existe siempre otro número natural que es igual a la suma a + b de estos dos números. Si pasamos ahora a contemplar la operación "inversa", la resta, vemos que ésta no está siempre definida ya dados dos números a, b; no siempre existe un número natural que represente a – b. Este existirá solamente en el caso que a y b satisfagan la condición $a \leqslant b$. Dicho con otras palabras, mientras la suma es una operación "siempre definida" en N, la resta es una operación "a veces definida en ese conjunto". Para poner a la resta en pie de igualdad con la suma, se amplía entonces el conjunto N al conjunto Z de los números enteros mediante la adición del conjunto de los números negativos ..., –4, –3, –2, –1. Evidentemente, en el conjunto Z están "siempre definidas" tanto la suma como la resta. Así, se postula la existencia del conjunto de los enteros negativos a fin de generalizar una operación. De modo similar, sabemos que en Z la multiplicación es una operación "siempre definida", mientras que la operación "inversa", la división, es en ese conjunto solamente "a veces definida", ya que a ÷ b estará definido solamente en caso de que exista un número entero único n ($n \neq 0$) tal que a = nb. Para lograr que la división sea una operación "siempre definida" se pasa a ampliar el sistema numérico creando el conjunto de los números racionales (también llamados fraccionarios), siendo éstos del tipo $\frac{a}{b}$, con la limitación de que la división por cero no está admitida.

No es, sin embargo, el caso de que no sea posible definir este tipo de división. Se trata solamente del hecho de que al generalizar la división e incluir el cero como divisor, aparecerían desventajas aún mayores que la desventaja que conlleva excluir al cero como divisor. De nuevo, y a efectos de generalizar una operación, hemos postulado la existencia de un conjunto. Hemos obtenido de este modo el conjunto Q de los números racionales. Por medios bastante más sofisticados, pero obedeciendo a un principio similar, se llega a postular la existencia del conjunto R de los números reales. La ampliación de Q a R proviene del hecho de que la "potenciación" está "siempre definida" en Q (4) para exponentes enteros, pero no así para exponentes racionales, ya que potencias del tipo $a^{1/n}$ llevan expresiones como p. e. $\sqrt{2}$ que no son expresables por números racionales. Esto nos lleva a admitir la existencia de lo que los pitagóricos llamaron

(1) Ver p. ej. N. Bourbaki: livre I *Théorie des Ensembles*, Chapitre 2, 1.7.

(2) Fuera del ámbito matemático, lo que sería cuestionable serían los axiomas que permiten demostrar la existencia de este conjunto.

(3) "Los números enteros fueron creados por Dios. Todo lo demás es obra humana".

(4) Salvo el caso 0^0, que no está definido.

"números irracionales". Así, Q, junto al conjunto de los irracionales, cuya existencia hemos justificado, nos dan el conjunto R. Finalmente, y debido a que para $a > 0$, $a^{1/n}$ está siempre definida en R, pero no así para $a < 0$, ya que en este caso podemos obtener expresiones del tipo $\sqrt{-2}$ que no tienen existencia en R "ya que no existe ningún número cuyo cuadrado sea un número negativo", se presenta la necesidad de realizar una nueva ampliación del sistema numérico, máxime que este problema conlleva el hecho de que no toda ecuación cuadrática tendría solución. El problema fue resuelto por los matemáticos de la época barroca, postulando la existencia del "enigmático" número i (5), llamado también "unidad imaginaria" que tenía la curiosa propiedad de ser un número tal que $i^2 = -1$. Gracias a la "existencia" de este "número" se pudo entonces extraer raíz cuadrada de cada número, y aunque no se garantizaba que el resultado fuese un número real, al menos se tenía por seguro que sería un número complejo. El "número" i fue, como he señalado, durante casi dos siglos un número enigmático, cuya "existencia" fue aceptada *nolens volens* por los matemáticos. No fue sino hasta este siglo, cuando gracias a la representación de los números reales y complejos mediante pares ordenados, la "existencia" de i pasó a ser la existencia de i, e i perdió su carácter de enigmático.

Pasaré ahora al conjunto vacío. La existencia de este conjunto queda garantizada usando argumentos similares a los que he usado para justificar la existencia de los enteros negativos, los números racionales, irracionales y del ex "misterioso" número i.

Supongamos pues, que tenemos un universo de discurso, con cuyos elementos formamos conjuntos (que desde luego, serán subconjuntos de este universo). Es conocido el hecho de que, dados dos de estos conjuntos A y B cualesquiera, a partir de ellos se puede construir un nuevo conjunto, llamado la unión (o reunión) de los conjuntos A y B. Tal conjunto suele designarse por $A \cup B$ y está constituído por aquellos elementos que pertenezcan al conjunto A o bien al conjunto B o a ambos conjuntos simultáneamente.

De manera similar, dados dos conjuntos A y B, a partir de ellos se puede construir un nuevo conjunto, llamado la intersección de los conjuntos A y B que suele designarse $A \cap B$ y que está constituído por aquellos elementos que sean comunes a los conjuntos mencionados.

Así, mientras la unión de dos conjuntos es una operación que puede efectuarse siempre, es evidente que la intersección es una operación "a veces definida" (en el universo dado) ya que sólo se podrá efectuar en el caso de que ambos conjuntos "tengan algo en común", pues si "no tuvieran *nada* en común", la intersección de ambos conjuntos no estaría definida.

Así, y siguiendo un esquema similar al que se ha seguido anteriormente, se tratará de poner a la operación "intersección" en pie de igualdad con la operación "unión". Para ello será necesario definir la intersección aún en el caso en que ambos conjuntos no tengan nada en común. A este efecto, se amplía el "conjunto de conjuntos" dado, en un elemento más, y se postula la existencia del conjunto vacío el cual se define como aquel conjunto que no contiene elementos (no contiene nada). Tal conjunto se suele designar por ϕ (6) y gracias a él, es posible realizar la operación intersección para cada par de conjuntos, ya que si los conjuntos en cuestión no tuvieran elementos en común, el conjunto "intersección" de ellos será entonces el conjunto vacío.

Aunque los argumentos dados en pro de la existencia del conjunto vacío son suficientes, ya que ellos garantizan la existencia de este conjunto del mismo modo que se garantiza la existencia de, por ejemplo, el número i, justificaremos su existencia también del modo siguiente: Dado un conjunto A (en un universo determinado), la noción conjuntista más primitiva que podemos tener es la de "pertenencia" o "no pertenencia" a este conjunto. Con otras palabras, el conjunto A está definido exactamente por nuestro conocimiento de los elementos que lo constituyen. Pero esto conlleva automáticamente al conocimiento de los elementos que no pertenecen a él y estos elementos forman de nuevo un conjunto cuyos elementos están caracterizados por la propiedad de no ser elementos del conjunto A. Este conjunto, constituído por los elementos que tienen la propiedad de no ser elementos del conjunto A, recibe el nombre de "el complemento del conjunto A" y se designa por $\bar{A}$. Así, cada vez que definimos un conjunto A

(5) El símbolo "i" fue introducido por Euler.

(6) No debe confundirse el símbolo ϕ con la letra griega Φ. El símbolo ϕ escogido para designar a este conjunto es la letra escandinava "ϕ".

en realidad definimos dos conjuntos: A y $\overline{A}$. Parece ahora natural que todo conjunto tenga un complemento. Nos preguntamos ahora: ¿Y el universo mismo? Con ello, volvemos a la antigua pregunta de: ¿qué hay fuera del universo? Platón, en el *Fedro,* al asomarse *eis ton éxon tópon* (7), a la región que se extiende más allá del Urano, encuentra las ideas.

Los atomistas (Demócrito, Leucipo) encuentran *kenós* (8) y eventualmente otros universos. ¿Qué encuentran los matemáticos fuera del universo (de discurso) dado? Se ha dicho que cada conjunto tiene un complemento. Siendo el universo un conjunto (9); según lo dicho anteriormente, deberá tener también un complemento. De lo contrario, habría conjuntos con y sin complemento (10). Es evidente que este conjunto (complemento) no existiría si no postulamos la existencia de ϕ, ya que "fuera del universo no existe nada" ya que no existe elemento que no esté comprendido en el universo. Así, fuera del universo, los matemáticos encuentran "la idea de conjunto vacío".

Es conocido el hecho de que haya dos manera de definir un conjunto:

a) Enumerando explícitamente todos sus elementos,
b) dando una propiedad discriminatoria que permita decidir cuáles de los entes (del universo) pertenecen al conjunto (¡y cuáles no!).

Dada una agrupación de entes cualquiera a, e, i, o, u, para que formen un conjunto, basta, a nivel humano, sencillamente el "querer que formen un conjunto". Así, nos bastaría, pues, exclamar: *Fiat coniunctum!* Este *Fiat coniunctum* se realiza, a nivel matemático, encerrando a los entes en cuestión en un paréntisis de llave, y separando estos entes por comas. Así, $\{$a, e, i, o, u$\}$ designa el conjunto constituído por los elementos a, e, i, o, u. En este caso, hemos definido un conjunto, enumerando explícitamente los elementos que los constituyen. Otra manera de designar el mismo conjunto, sería dando una propiedad que permita decidir si un elemento cualquiera del universo pertenece o no al conjunto. En este caso, la propiedad sería "es vocal del alfabeto castellano" (11). Así, volveríamos a usar el paréntesis de llave para indicar la formación de un conjunto y escribiríamos:

$\{$X : X es una vocal del alfabeto castellano$\}$ (12); o bien, usando p. ej., la letra p para designar la proposición "es una vocal del alfabeto castellano", escribiríamos sencillamente: $\{X : p\}$

Es claro ahora, que el conjunto vacio podria ser designado como $\phi := \{X : X \neq X\}$; o bien, $\phi := \{X : q \wedge \neg q\}$ (13), en donde q es una proposición cualquiera. Otro modo de designar el conjunto vacío, sería, y en acuerdo con lo expresado anteriormente, escribir simplemente $\{\ \}$ ya que este símbolo indicaría un conjunto en el cual no hay elementos, pero esta notación no es usual.

He de hacer notar que el Doctor Subtilis, Duns Scotus, en sus *Cuestiones Cuodlibetales* (1306) ve la posibilidad de la existencia del conjunto vacío en una manera bastante interesante (Quaestio XI) (14) ya que de algún modo concuerda con esta notación no usual. Scotus contempla la posibilidad de que Dios aniquile los elementos, sin aniquilar el cielo. Ergo, argumenta el Doctor Subtilis, puede permanecer la superficie cóncova

(7) "Hacia el lugar externo".

(8) "El vacío".

(9) Por razones técnicas, sería mejor en vez de llamar al universo "conjunto", llamarlo "clase". En todo caso, este cambio no afectaría nuestros argumentos.

(10) La formación del complemento de un conjunto puede considerarse también como una operación "unaria" que a cada conjunto le hace corresponder otro. Se trataría entonces, como lo hemos hecho anteriormente, de evitar que una operación quede "a veces definida".

(11) Queda entonces claro que en este caso el universo es "el alfabeto castellano".

(12) Esto sería leído: "el conjunto de todos los x tal que x sea una vocal del alfabeto castellano".

(13) $\{x : x \neq x\}$ representa al conjunto de todos los entes x con la propiedad de ser diferentes de sí mismos. $\{x : q \wedge \leftrightharpoons q\}$ representa el conjunto de todos los entes x que cumplan una proposición q y simultáneamente su negación. Es evidente que $\{x : x \neq x\}$ y $\{x : q \wedge H\, q\}$ designan a un mismo conjunto: ϕ.

(14) Por la importancia del texto, lo reproduzco textualmente. ... *aut saltem secundum theologos, possibile est Deum elementa annihilare quae, quantum est ex formis suis sunt corruptibilia, licet non annihilet caelum quod, secundum forman suam, est incorruptibile; quia in conservando prius et magis necessarium non requirit*

del cielo, sin que contenga ningún cuerpo. Por así decirlo, tendríamos pues, la "envoltura" del conjunto solamente, ya que dentro de ella no habría nada.

Ahora bien: el conjunto ϕ es vacío, pero el conjunto $\{\ \phi\ \}$ *no es vacío* ya que representa al "conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío" y hemos llegado aquí a la *creatio ex nihilo* ya que, a partir del conjunto vacío, hemos creado un conjunto no vacío. Es más, a partir del conjunto vacío podemos construir un conjunto no vacío e infinito: el conjunto de los números naturales del cual hemos partido para hacer nuestras disquisiciones. Recordemos que según Kronecker, este conjunto los consideraba como "dado" y a partir de éste se constituye, por ingenio humano, todo el sistema numérico.

Llamaremos "cardinalidad" de un conjunto sencillamente al número de elementos que contiene (15). Evidentemente, la cardinalidad de ϕ es cero y la de $\{\ \phi\ \}$ es uno. A partir de los conjuntos ϕ y $\{\ \phi\ \}$ podemos construir el conjunto $\{\phi\ \{\phi\}\ \}$ que contiene dos elementos que son precisamente los conjuntos ϕ y $\{\ \phi\ \}$ ya discutidos. Así, la cardinalidad de este conjunto será dos. Podríamos luego, a partir de los conjuntos ϕ, $\{\phi\}$ y $\{\phi, \{\phi\}\}$ construir el conjunto $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ cuya cardinalidad sería tres.

Evidentemente, tendríamos de este modo la sucesión de conjuntos ϕ, $\{\ \phi\ \}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$, ... (16) cuyas cardinalidades serían 0, 1, 2, 3, ...

Esto justifica que afirmemos que los conjuntos ϕ, $\{\ \phi\ \}$, ... representan (¡son!) los números naturales 0, 1, ...

Así, nuestra *creatio ex nihilo* nos permite, a partir del conjunto vacío, obtener la sucesión de los números naturales, que constituyen un conjunto no vacío e infinito.

Siguiendo, pues, la idea de Kronecker, estamos ahora en condiciones de ahorrarle un poco de trabajo a Dios. En vez de afirmar: "Los números naturales fueron creados por Dios. Todo lo demás es obra humana", podemos afirmar ahora: "Dios creó el conjunto vacío. Todo lo demás es obra humana".

BIBLIOGRAFIA

H.B. Brinkman, D. Puppe, Kategorien und Funktoren. Springer–Verlang Berlín, Heidelberg, New York – 1966.

N. Bourbaki Eléments de Mathématique, Livre I, Théorie des Ensembles, Chapitre 2, Hermann, París, 1960.

Juan Duns Escoto Cuestiones Cuodlibetales B.A.C., Madrid,, 1968.

---

tanquam medium aliquod minus necessarium conservari. Absolute, igitur, potest annihilare elementa et nihil innovare circa esse caeli; hoc posito, latera çaeli non concurrent in instanti, quia natura non potest facere talem transmutationem in instanti, remanere igitur potest superficies concava caeli, et tamen non continens aliquod corpus.

(15) A efectos de lo que se quiere lograr aquí, esta sencilla definición basta.

(16) Técnicamente, esta sucesión se construye de modo similar a la función de Peano usada para la construcción de los números naturales. La función en cuestión sería:

$$\phi \to \phi \cup \{\phi\}$$