Rev. Fil. Univ. Costa Rica, XX(52), 177-180, 1982.

LESNIEWSKI, QUINE Y GEACH
UN ANALISIS DE SUS DEMOSTRACIONES CON RESPECTO A LA RESTRICCION DEL AXIOMA V DEL SISTEMA DE FREGE

Max Freund

Bertrand Russell, en 1902, le informó a Gottlob Frege que su sistema expuesto en *Grundgesetze der Arithmetik* permitía la aparición de una paradoja; Frege respondió de inmediato reconociendo el problema y prometiendo hacer referencia a tal situación en el volumen II de sus *Grundgesetze der Arithmetik* (1), el cual estaba a punto de ser publicado; y efectivamente así lo hizo.

No hay nada más ingrato para un escritor científico el que uno de los fundamentos de su edificio sea sacudido después de terminado su trabajo.
He sido puesto en esta posición por una carta del señor Bertrand Russell justamente antes de que este volumen estuviera casi impreso. (...)El señor Russell ha encontrado una contradicción que pasaré ahora a detallar. Nadie afirmaría que la clase de los hombres es un hombre. Aquí, tenemos una clase que no pertenece a sí misma. Diré que algo pertenece a una clase si cae bajo el concepto cuya extensión es esa misma clase. Ahora considérese el concepto la clase que no pertenece a sí misma. La extensión de este concepto (si se puede hablar de su extensión) es, en conformidad, la clase de clases que no pertenecen a sí mismas. Por brevedad llamaremos a esta clase la clase C. Ahora preguntemos si la clase C pertenece a sí misma. Supongamos primeramente que si pertenece. Si algo pertenece a la clase, entonces cae bajo el concepto cuya extensión es esa clase; en conformidad, si nuestra clase C pertenece a si misma, entonces es una clase que no pertenece a si misma. Por lo tanto, nuestro primer supuesto nos lleva a una contradicción. Ahora bien, supongamos que nuestra clase C no pertenece a sí misma, entonces ella cae bajo el concepto cuya extensión es ella misma y, así, no pertenece a sí misma. ¡Se cae aquí de nuevo en otra contradicción! (2).

Para escapar de esa paradoja (conocida años más tarde como "la paradoja de Russell") Frege restringió el axioma V de su sistema (3). Sin embargo, años más tarde Boleslaw Sobociński informó que Stanisław Leśniewski en 1938 había deducido una contradicción del axioma restringido (4); por otro lado, Willard Quine, independientemente, sin conocer del informe de Sobociński, logró probar otra contradicción (5). Finalmente, Peter Geach generalizó el resultado publicado en el informe citado (6).

En el presente artículo analizaré, de forma muy general, las pruebas mencionadas con el fin de establecer algunas diferencias que existen entre ellas y algunas de sus consecuencias epistemológicas.

I. El informe de Sobocinski

En su artículo "L' analyse de l'antinomie russelliene par Leśniewski" Boleslaw Sobociński, refiriéndose a la restricción del axioma V del sistema de los *Grundgesetze der Arithmetik*, nos dice que

(...) la propuesta de Frege no fue más comentada y no sucitó interés alguno. Solamente en 1938 Leśniewski mostro que EI (el teorema Vb', cf nota (3) entraña por sí misma una contradicción (...) (7).

La demostración de tal contradicción se lleva a cabo dentro del sistema lógico de Leśniewski llamado "Ontología". Este sistema es un cálculo de nombres cuya consistencia puede ser probada (8). Siendo el caso que tal sistema es poco conocido, inclusive en medios lógicos y matemáticos, lo expondré aquí muy brevemente.

El sistema de Ontología se acostumbra a postularlo sobre la base de otro sistema de lógica, a saber: Prototética; este sistema constituye un cálculo proposicional con variables proposicionales y de functores proposicionales de función veritativa, y cuantificadores que ligan ambos tipos de variables (9). Sin embargo, Ontología puede postularse también sobre la base de la teoría de la cuantificación y la lógica proposicional de función veritativa.

Se obtiene el sistema de Ontología si agregamos a la base citada dos reglas de definición, una de extensionalidad y un axioma. Las definiciones de Ontología pueden ser de dos tipos: unas en las que definimos constantes y functores proposicionales (estas son llamadas "definiciones prototéticas" y son reguladas por una de las dos reglas de definición) y las otras en las que definimos constantes y functores nominales (estas son llamadas "definiciones ontológicas" y son controladas por la otra regla de definición). Tales definiciones son del tipo llamado "definiciones creativas" y toman la forma de equivalencias; deben ser consideradas dentro del sistema como tesis.

Originalmente el sistema de Ontología lo formuló Leśniewski con el siguiente axioma agregado al sistema de Prototética:

$$(Aa)\ A \in a . \equiv : (_E B) B \in A .\ (C)\ C \in A \supset C \in a .\ (CD).\ C \in A . D \in A \supset C \in D$$

Este enunciado nos dice que "A ∈ a" (se lee A es un a) es verdadero si y solo si existe un A, A es único y A es a.

Años más tarde, basándose en investigaciones de Sobociński y Tarski, Leśniewski logró simplificar el axioma citado a lo siguiente

$$(Aa):\ A \in a . \equiv . (_E B).\ A \in B .\ B \in a$$

Esto dice que "A ∈ a" si y solo si A es algún objeto que es a (10). Lejewski ha logrado formular algunos axiomas característicos de Ontología usando functores diferentes de "∈" y que son inferencialmente equivalentes al axioma anteriormente citado (11).

Si se agrega el axioma de la infinitud al sistema de Ontología, entonces obtenemos los axiomas de Peano y, por ende, toda la aritmética recursiva. De ahí que John Thomas Canty lograra probar los dos teoremas de Gödel para esa extensión dee Ontología (12). Por otro lado, Charles Davis logró probar dentro del campo de Ontología diversos enunciados equivalentes al axioma de la escogencia (13).

Dadas ya algunas características de Ontología, pasaré entonces a describir, en forma general, la prueba de Leśniewski. Sobre la base de Ontología Leśniewski logró deducir una contradicción a partir del teorema Vb' (14) mediante dos supuestos que nadie cuestionaría. El primero nos dice

$$(ABa):\ A \in Kl\ (a) .\ B \in Kl\ (a) . \supset A = B$$

aquí "Kl(a)" debe leerse igual que "clase de los a's". El segundo supuesto nos afirma que existe en el universo por lo menos tres objetos diferentes:

$$(_E ABC).\ A \in A .\ B \in B .\ C \in C . \sim (A = B) . \sim (A = C) . \sim (B = C)$$

A partir de esos dos supuestos, el teorema y la base axiomática citada, se deduce la contradictoria del segundo supuesto, a saber: existe a lo sumo dos objetos diferentes

$$ABC):\ A \in A . B \in B . C \in C . \sim (A = B) \sim (B = C) . \supset A = B$$

Por lo tanto, la restricción del axioma y conduce a una contradicción, pues de él es posible deducir el teorema Vb'.

II. La demostración de Quine

A raíz de ciertas afirmaciones de Peter Geach con respecto a la similitud de la solución de Frege a la paradoja de Russell con la de Quine en su libro *Mathematical Logic* (15), este último decidió tratar el tema de la restricción del axioma V. En su trabajo "On Frege's Way Out" Quine prueba que si asumimos un enunciado más débil que aquel de la restricción del axioma V, es posible deducir una contradicción sobre la base de la lógica de predicados de primer orden con identidad. Esto prueba de forma inmediata tque la trestricción del mencionado axioma implica una contradicción, ya que de él es posible deducir el enunciado más débil, a saber:

$$(y)\ (y \neq x\ (Fx) . \supset \because y \in \tilde{x}(Fx) \equiv Fy) \qquad (16)$$

Este nos dice que cualquier individuo que no sea la extensión o la clase determinada por la propiedad F es un miembro de la clase determinada por la propiedad F si y solo si posee la propiedad F. Es claro que ese enunciado deja abierta la posibilidad de que la extensión de F sea un miembro de la clase o que la extensión de F sean todos los objetos que poseen esa propiedad exceptuando la extensión de F. Esto último es por lo que optó

Frege al tratar de salir de la paradoja.

La deducción de la contradicción se obtiene mediante la aplicación del enunciado débil a varias propiedades, v. g. $x = x$, $x \neq x$, $(z)(x \in z.z. \in x. \supset x = z)$. Estas propiedades definen las clases V (universal), ϕ (vacía) y W respectivamente.

Sea iz la clase $x(x = z)$, i.e. la clase de los objetos idénticos a z. Mediante lógica de predicados de primer orden con identidad y la aplicación del enunciado débil a ciertas propiedades (como se dijo anteriormente), Quine obtiene la siguiente contradicción: $\sim$ (iW $\in$ W; i.e. la clase de los objetos idénticos a W es y no es miembro de W.

III. Algunas consecuencias epistemológicas

Si se compara la demostración de Quine con la Leśniewski, se evidencia la siguiente característica: la prueba de Leśniewski descansa sobre un supuesto no lógico (i.e. postular la existencia de tres objetos) mientras que la de Quine no. Esto hace que la demostración de Quine posea un carácter más fuerte epistemológicamente. Sin embargo, con esto no quiero decir que la prueba de Leśniewski no sea meritoria; Leśniewski probó algo de extrema importancia: la restricción del axioma V no es una fórmula válida. Por otro lado, la demostración de Quine va más allá de este resultado: no solo prueba que la restricción del mencionado axioma no es una fórmula válida, sino que es totalmente falsa en cualquier modelo de primer orden. Iguales consecuencias epistemológicas posee la demostración de Peter Geach que pasamos a continuación a describir de un modo muy general.

IV. La demostración de Peter Geach

A diferencia de las pruebas anteriores, Peter Geach, en "On Frege's Way Out", usa un enunciado más general, para deducir la contradicción, a saber:

$$(y)\ y \in \hat{x}(Fx).\equiv.\ y \neq Ex\ (Fx).\ Fy$$

aquí Ex es una función especificable que toma como argumentos cualquier clase; en el caso de Frege el valor de esa función para el argumento y es y misma.

Mediante la aplicación de ese enunciado general a varias propiedades llega a la contradicción siguiente:

$$H(W) \in W. \sim H(W) \in W$$

aquí W es la siguiente clase: $x(y)\ (x = Hy \supset \sim (x \in y))$; en donde H es una función definida así:

Si Ex $(y) \neq$ iy, entonces Hy = iy
si Ex (y) = iy y y es una clase unitaria, entonces Hy = V
si Ex (y) = iy y y no es una clase unitaria, entonces Hy = y iy es la clase de los objetos idénticos a y.

Las consecuencias epistemológicas de esta pureba son las mismas que la de Quine. La restricción del axioma y conduce a otra contradicción y, por ende, es un enunciado falso e inválido. ¡El sistema de los *Grundegesetze der Arithmetik* reformulado no es inmune a las paradojas!

BIBLIOGRAFIA

Canty, John Thomas, "The numerical epsilon", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. X, número 1, 1969, págs. 47 a 62.

Canty, John Thomas, "Lesniewski's terminological explanations as recursive concepts", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. X, No. 4, 1969, págs. 337 a 368.

Davis, Charles C., "An investigation concerning the Hilbert Sierpinski Logical Form of the axiom of Choice", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. XVI, No. 2, 1975, págs. 145 a 184.

Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*, Georg Olms Verlagsbuch Handlung, 1962.

Geach, Peter, "On Frege's Way Out", *Mind*, LXV, 1956, págs 408 a 409.

Heijenoort, Jean van, *From Frege to Gödel, Asource book in mathematical logic*, Harvard University Press, 1967.

Lejewski, Czesaw, "Consistency of Lésniewski's Mereology", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 34, No. 3, 1969, págs. 321 a 326.

Lejewski, Czesaw, "On Leśniewski's Ontology", *Ratio*, 1958, págs. 150 a 176.

Quine, Williard v, "On Frege's Way Out", *Mind*, Vol. LXIV, 1955, págs. 145 a 159.

Supecki, Jerzy, "S. Lésniewski's calculus of names", *studia Logica*, Vol. III, págs 7 a 71.

Supecki, Jerzy, "S. Leśniewski's Protothertics"*Studia Logica*, Vol. I, págs. 44 a 110.

Sobociński, Boleslaw, "L' analyse de l'antinomie russelliene par Lesniewski", *Methodos*, Vol. I, págs 94 a

107, 220 a 228, 308 a 316 y Vol. II, págs. 237 a 257.
Sobociński, Boleslaw, "On the single axioms of Protothetics", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. I, 1960, págs. 52 a 73.
Sobociński, Boleslaw, "Successive simplifications of the axiom system of Lesniewski's Ontology", en *Polish Logic*, Oxford University Press.

CITAS

(1) Cf. "Letter to Frege" y "Letter to Russell" en Heijenoort, J. V., *From Frege to Gödel, A source book in* mathematical Logic, págs. 124 a 129.

(2) "In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Rusell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte (...) Herr Russell hat einen Widerspruch aufgefunden, der nun dargelegt werden mag. Von der Klasse der Menschen wird niemand behaupten wollen, dass sie sin Mensch sei. Wir haben hier eine Klasse, die sich selbst nicht angehört. Ich sage nämlich, etwas gehöre einen Klasse an, wenn es unter den Begriff fällt, deseen Umfang eben die Klasse ist. Fassen wir nun den Begriff ins Auge Klasse, die sich selbst nicht angehört Der Umfang dieses Begriffes, falls man von ihm reden darf, ist demnach die Klasse der sich selbst nicht angehörende Klassen. Wir wollen sie kurz die Klasse K nennen. Fragen wir nun, ob diese Klasse K sich selbst angehöre! Nehmen wir zuerst an, sie thue es! Wenn etwas einer Klasse angehört, so fällt es unter den Begriff dessen Umfang die Klasse ist. Wenn demnach unsere Klasse sich selbst angehört so ist sie eine Klasse, die sich selbst nicht angehört. Unsere eritete Annahme fürht also auf einen Widerspruch mit sich. Nehmen wir zweitens an, unsere Klasse K gehöre sich selbst nicht an, so fällt sie unter den Begriff dessen Umfang sie selbst ist, gehört also sich selbst an. Auch hierwieder ein Widerspruch! ". Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*, pgs. 253 a 254.

(3) El axioma V puede ser expresado en notación Peano Russell del siguiente modo

$$\hat{x}(Fx) = \hat{x}(Gx). \equiv .(y)\ (Fy \equiv Gy)$$

La restricción de Frege de este axioma es la siguiente

$$x(Fx) = \hat{x}(Gx). \equiv (y)\ (y \neq \hat{x}(Gx).\ y \neq \hat{x}(Fx). \supset .Fy \equiv Gy)$$

Este último implica "$\hat{x}(Fx) = \hat{x}(Gx). \supset (y)\ (y \neq x(Fx).\ y \neq x(Gx). \supset\ Fy \equiv Gy)$" "llamado por Frege "teorema Vb"" y el cual es usado por Lesniewski en su prueba.

(4) Cf. Sobocinski, B., "L'analyse de l'antinomie ruselliene par Lesniewski"

(5) cf. Quine, W. V., "On Frege's Way Out"

(6) cf. Geach, P., "On Frege's Way Out"

(7) "la proposition de Frege no fut guére remarqués et ne suscita aucun itneret. En 1938 seulement Lesniewski a montré que El entraine, lui aussi, une contradiction (...)" Sobocinski, B., *op. cit.*, pg 221

(8) Para una introducción a este sistema cf. Lejewski, C., "On Lésniewski's Ontology" y Supecki, J. "S. Leśniewski's calculus of names"; para una prueba de la consistencia de Ontología cf. Lejewski, C., "Consistency of Lésniewski's Mereology", pgs 324 a 326

(9) Para una introducción al sistema de Prototética cf. Supecki, J. "S. Lésniewski's Protothetics" y Sobociński, B, "On the single axioms of Protothetics"

(10) Para una historia de la simplificación de los axiomas de Ontología cf. Sobociński, B., "Successive simplifications of the axiom sytemof Leśniowski's Ontology",

(11) cf. Lejewski, C., "On Leśniewski's Ontology", pgs 164 a 172

(12) cf. Canty, J. T., "The numerical epsilon" y Canty, J. T., "Leśniewski's terminological explanations as recursive concepts"

(13) cf. Davis. C. C., "An investigation concerning the Hilbert Sierpinski logical form of the axiom of choice"

(14) cf. nota (3)

(15) cf. Quine, W. V., *op. cit. pgs 485 a 486*

(16) este enunciado corresponde a la restricción del teorema 1 de los *Grundgesetze der Arithmetik*. El functor "$\in$" debe entenderse aquí como el de teoría de conjuntos y no como el de Ontología.