Rev. Fil. Univ. Costa Rica, XXII (55 y 56), 73—79, 1983.

LA TEORIA DE CONJUNTOS EN SENTIDO COLECTIVO

Boleslaw Sobocinski
In memoriam

Max Freund

Resumen: *Este artículo constituye una introducción muy general y con el menor tecnicismo posible a una de las llamadas "teorías lógicas de Lesniewski", a saber: la Meriología. La Meriología es una teoría de conjuntos, pero conjunto tomado en sentido colectivo. A lo largo del artículo se describen varias axiomatizaciones de esta teoría y se mencionan algunos resultados metateóricos tales como la consistencia y la relación que tiene con el álgebra booleana.*

Meriología, la teoría de conjuntos en sentido colectivo, junto con Prototética y Ontología (1) forman los llamados "sistemas lógicos de Leśniewski". Tales sistemas pueden servir de fundamento de las matemáticas. Así, por ejemplo, si al sistema de Ontología se le agrega el axioma de la infinitud podemos deducir los análogos de los axiomas de Peano y, por ende, toda la matemática clásica. Por otro lado, el sistema de Meriología se ha usado como fundamento de la geometría (2).

Dado lo poco conocido que es el sistema de Meriología y la importancia que posee en la fundamentación de las matemáticas, expondré en este artículo, con el menor tecnicismo posible, tal sistema. Los sistemas de Prototética y Ontología serán tocados aquí muy brevemente y la intención es de exponerlos más extensamente en otros artículos.

I. Dos sentidos del término "clase"

Leśniewski llegó a construir el sistema de Meriología en 1916 como resultado de sus investigaciones en la paradoja de Russell. Estas investigaciones lo llevaron a tres soluciones de la paradoja, de las cuales la última constituye la determinante en la construcción de sus teorías lógicas (3).

El origen de la paradoja en su último análisis lo encontró en la confusión de dos sentidos del término "clase". Se confundía, según él, "clase" en sentido distributivo con el de "clase" en sentido colectivo. La diferencia de estos dos sentidos puede ser aclarada mediante el siguiente ejemplo: si tomamos la clase de los países latinoamericanos en sentido distributivo, entonces Guatemala y Argentina serán elementos de esa clase pero no así Buenos Aires y Antigua Guatemala; sin embargo, si tomamos esa clase en sentido colectivo, entonces Buenos Aires y Antigua Guatemala serán elementos de esa clase y así mismo sus habitantes y sus barrios

La teoría de la clase en sentido distributivo se constituyó más tarde en el sistema "Ontología", la teoría de la clase en sentido colectivo en el sistema llamado "Meriología".

II. Ontología y Prototética

El sistema de Meriología está basado sobre el de Ontología y este a la vez en el de Prototética.

Prototética es un cálculo generalizado de proposiciones. En él hay variables de proposiciones y de funciones, las cuales pueden ser ligadas por cuantificadores. De este sistema es posible deducir todo el cálculo proposicional de función veritativa y la teoría de la cuantificación (4).

Por otro lado, el sistema de Ontología es un cálculo de nombres. Se obtiene a partir de Prototética agregándole a este una nueva categoría semántica, la de los nombres (5), un símbolo primitivo "$\in$" que es un functor formador de proposiciones que toma nombres como argumentos y cuya interpretación intuitiva es la siguiente: $A \in b$ (se lee "A es un b") es una proposición que es verdadera solamente cuando A existe, es única y es b. Esta interpretación intuitiva se expresa en el axioma siguiente característico de Ontología (i. e. el axioma que se le agrega a Prototética para obtener los axiomas de Ontología) (6):

$$[A\ a] :: A \in a \equiv \therefore [\exists B] . B \in A \therefore [B\ C] : B \in A . C \in A . \supset . B \in C \vdots [B] : B \in A . \supset B \in a$$

Más tarde este axioma fue simplificado a

$$[A\ a] \therefore A \in a . \equiv : [\exists B] : A \in B . B \in a$$

III. La axiomatización del sistema de Meriología

Históricamente, Meriología fue el primer sistema construido por Leśniewski. Se obtiene este sistema agregando un nuevo símbolo primitivo y uno o varios axiomas al sistema de Ontología. El sistema axiomático de 1916 tenía como símbolo primitivo a "pt", el cual es interpretado intuitivamente como "es parte de"; así, "$A \in pt\ (B)$" se interpreta intuitivamente como A es parte de B. Tal sistema constaba, además, (con algunas modificaciones) de los siguientes cuatro axiomas y dos definiciones:

A1 $[A\ B\ C] : A \in pt\ (B) . B \in pt\ (C) . \supset . A \in pt\ (C)$

A2 $[A\ B] : A \in pt\ (B) . \supset . \sim (B \in pt\ (A))$

A3 $[A\ B\ a] : A \in Kl\ (a) . B \in Kl\ (a) . \supset A = B$

A4 $[A\ a] : A \in a . \supset . [\exists B] . B \in Kl\ (a)$

D1 $[A\ B] : A \in A . A = B \vee A\ pt\ (B) : \equiv . A \in el\ (B)$

D2 $[A\ a] :: A \in A \therefore [D] : D \in a . \supset . D \in el\ (A) \therefore [D] : D \in el\ (A) . \supset [\exists E\ F] - F \in a . F \in el\ (D) . F \in el\ (E) \therefore \equiv . A \in Kl\ (a)$

A1 y A2 expresan la transitividad y asimetría de "pt". Por otro lado, D2 define la noción de que algo sea una clase (i.e. "Kl") en términos del concepto ser elemento de (i.e. "el") y este, a la vez, es definido en D1 por medio de "pt" y "=". Lo que establece la definición D1 es lo siguiente: A es un elemento de B ($A \in el\ (B)$) si y solo si A es un objeto y o bien A es igual a B o A es parte de B ($A \in pt\ (B)$). La definición D2 dice lo siguiente: A es una clase ($A \in Kl\ (b)$) de los b si y solo si A es un objeto, existe algún b y todo elemento de A posee un elemento que es elemento de algo que es b y todo b es elemento de A. La definición D2 expresa lo que es una clase en sentido colectivo. Como se dijo anteriormente, la clase en sentido colectivo es igual a la suma de sus elementos, por consiguiente, las partes de ese todo constituye los elementos de esa clase (dada la definición de "el").

El axioma A3 expresa la unicidad de una clase y, por último, el axioma A4 afirma que cuando quiera que exista algo que sea b entonces existe la clase de los b.

El sistema axiomático de 1916 fue cambiado posteriormente ya sea por Leśniewski mismo o por sus discípulos. En 1920 Leśniewski construyó un sistema axiomático que constaba de cuatro axiomas y que tomaba a "el" como functor primitivo. Más tarde, en 1948, basándose en un resultado de Grzegorczyk. Bolesaw Sobociński construyó un sistema axiomático con "el" como functor primitivo, que constaba de un solo axioma y cumplía con los criterios metodológicos de Leśniewski (7). Este único axioma es el siguiente:

$$[A\ B] \because\!\because A \in el\ (B) . \equiv \vdots\cdot\vdots B \in B \vdots\cdot\vdots [f a] \vdots\ \vdots [C] :: C \in f\ (a) . \equiv [D] : D \in a . \subset . D \in el\ (C) \therefore [D] : D \in el\ (C) . \supset . [\exists E F] . E \in a . F \in el\ (D) . F \in el\ (E) \vdots\ \vdots B \in el\ (B) . B \in el\ (B) . B \in a \supset \because A \in el\ (f\ (a))$$

En 1954 y 1955 C. Lejewski construyó sistemas axiomáticos que constaban de un solo axioma para los functores "Kl", "extr." (i. e interpretado intuitivamente como "fuera de"), "ov" y "el"; años más tarde construyó también uno para el functor "pt" (8). Sin embargo, en los axiomas de Sobocinski y Lejewski se cuantifica sobre variables nominales y de funciones. De ahí que surgiera el problema de encontrar sistemas axiomáticos, con un solo axioma, en el cual se cuantificara solo sobre variables nominales. Este problema lo solucionó Lejewski en 1960 para el functor "elKL" (9). Por otro lado, en 1961, Sobocinski planteó en su seminario de lógica en la Universidad de Notre Dame el problema de encontrar un sistema axiomático con un solo axioma para el functor "el", en el cual se cuantificara solo sobre variables nominales. Este problema también fue solucionado dos años más tarde por el mismo Lejewski (10) al construir el siguiente axioma:

[A B] ∴ A ∈ el (B). ≡ ∴ B ∈ B ∴ [C a] ∷ [D] ∴ D ∈ C. ≡ ∴ [E] : E ∈ a. ⊃. E ∈ el (D) ∴ [E] : E ∈ el (D). [∃ FG] . F ∈ a. G ∈ el (E). G ∈ el (F) ∴ B ∈ el (B). B ∈ a ⊃. A ∈ el (C)

Además de los axiomas y las definiciones, hay en el sistema de Meriología reglas de definición, de extensionalidad, de substitución y de separación. Las reglas de definición son dos: la regla para introducir definiciones proposicionales (i. e. regla de definiciones prototéticas) y la regla para introducir definiciones nominales (i. e. regla de definiciones ontológicas). La regla primera nos permite definir formadores de proposiciones y proposiciones constantes; la segunda nos permite definir functores formadores de nombres y nombres constantes.

La regla de definiciones prototética puede ser descrita del siguiente modo:

Sea T la última tesis en determinado momento de desarrollo del sistema, podemos agregar al sistema una nueva tesis de la forma

[...] : α . ≡ . β (...)

en el supuesto de que se cumplan las siguientes condiciones el definiens (el lado izquierdo de la equivalencia, representado por "α") es con respecto a T una expresión proposicional significativa (i. e. toda constante que aparece en α debe aparecer en T o en una tesis anterior a T) y toda variable en α debe pertenecer a una categoría semántica introducida anteriormente en el sistema. El definiendum (el lado derecho de la equivalencia, representado por "β (...) es o bien (a) una proposición constante que no aparece en T ni en tesis anteriores a T, o (b) es una función formadora de proposiciones o una función multiligadora cuyos functores representados por "β" no aparecen en T ni en tesis alguna que preceda a T; los argumentos del functor "β" deben ser variables, las cuales no deben aparecer más de una vez en el definiens como variables libres; las variables que aparecen en el definiens y en el definiendum deben ser ligadas por el cuantificador a la izquierda de la equivalencia.

La regla de definiciones puede ser enunciada del siguiente modo:

Sea T la última tesis de determinado momento de desarrollo del sistema, podemos agregar una nueva tesis de la forma

[A ...] : α (A ∈ β). ≡ . A ∈ ∂ (...)

en el supuesto de que se cumplan las siguientes condiciones: el definiens (la expresión representada por "α (A∈β)" es con respecto a T una expresión proposicional significativa; es o bien una expresión de la forma A ∈ β o una conjunción igual a esta última y precedida de un cuantificador existencial. Todo término constante en el definiens aparece en T o en una tesis anterior a T en el sistema. La expresión "∂ (...) "es (i) un nombre constante que no aparece en T ni en tesis alguna que preceda a T en el sistema; o (ii) un simple functor nominal o un functor nominal multiligridor. El functor representado por "∂" no aparece en T ni en tesis alguna que preceda a T en el sistema y sus argumentos son variables que no aparecen más de una vez en el definiendum no son equiformes con "A". Toda variable que aparece en el definiens aparece en el definiendum; un cuantificador universal debe ligar todas las variables libres que aparecen en la equivalencia.

Por otro lado, las reglas de extensionalidad son dos, a saber: la regla de extensionalidad proposicional y la de extensionalidad nominal. La primera puede ser expresada del siguiente modo:

Sea T la última tesis en determinado momento de desarrollo del sistema, podemos agregar al sistema una nueva tesis de la forma:

[φ ψ] ∴ [...] : φ (...) . ≡ . ψ (...) : ≡: [Φ] : Φ (φ) . ≡ . Φ (φ)

en el supuesto de que toda variable en esta tesis pertenezca a una categoría semántica introducida anteriormente en el sistema y de que se cumpla las siguientes condiciones: las expresiones proposicionales denotadas por "φ (...)" y "ψ (...)" son functores proposicionales simples o functores multiligadores proposicionales; son equiformes excepto por los functores "φ" y "ψ"; sus argumentos son variables, ninguna de las cuales aparece en cualquiera de los functores más de una vez.

La regla de extensionalidad nominal puede ser enunciada así:

Sea T la última tesis en determinado momento de desarrollo del sistema, podemos agregar al sistema una nueva tesis de la forma:

[γ φ] ∴ [A...] : A ∈ γ (...) . ≡ . A ∈ γ (...) :

≡ : [Φ] : Φ (γ) ≡ Φ (γ)

en el supuesto de que toda variable en esta tesis pertenezca a una categoría semántica introducida anteriormente en el sistema y de que se cumpla con las siguientes condiciones, las expresiones representadas por "γ (...)" y "δ (...)" son (i) variables nominales diferentes de "A" y entre ellas mismas, o (ii) simples functores nominales o functores nominales multiligadores los cuales son equiformes entre ellos excepto por los functores "γ" y "δ"; los argumentos de las dos functores son todos variables, las cuales no son equiformes con A ni aparecen en cualquiera de los functores más de una vez.

Por último, los teoremas de Meriología son probados en forma suposicional y usando las reglas de deducción natural. Para ilustrar esto, probaré un teorema usando el siguiente sistema axiomático basado en el functor "el":

1) Prototética o el cálculo proposicional y la teoría de la cuantificación.

2) Las reglas de definición y extensionalidad mencionadas anteriormente; las reglas de substitución y separación.

3) 1. $[A] : A \in A . \supset . A \in el\ (A)$
2. $[A\ B] : A \in el\ (B) . B \in el\ (A) . \supset . A = B$
3. $[A\ B\ C] : A \in el\ (B) . B \in el\ (C) . \supset . A \in el\ (C)$
4. $[A\ B] : A \in el\ (B) . \supset . B \in B$
D5. $A \in A\ [D] : [D \in a \supset D \in el\ (A) : [D] : D \in el\ (A) . \supset . [_{]} E\ F] . E \in a, F \in el\ (D) . F \in el\ (E) \therefore \equiv . A \in Kl\ (a)$
6. $[A\ B\ a] : A \in Kl\ (a) . B \in Kl\ (a) . \supset . A = B$
7. $[A\ a] : A \in a . \supset [_{]} B] . B \in Kl\ (a)$

4) $[A\ b] : A \in b . \equiv . [_{]} B] . A \in B . B \in b$

Teorema: $[A\ B\ a] : A \in el\ (B) . B \in a . \supset . A \in el\ Kl\ (a)$

Prueba: $[A\ B\ a]$

Hipotesis (1) $A \in el\ (B)$
Hipótesis (2) $B \in a$

3– $[_{]} C] . C \in Kl\ (a)$
(Hip (2) y 3.7)

4– $[D] : D \in a . \supset . D \in el\ (C)$
(3– y D5)

5– $B \in el\ (C)$
(Hip (2) y 4–)

6– $A \in el\ (C)$
(Hip (1), 5 y 3.3)

7– $[F\ D] : D \in Kl\ (a) . F \in Kl\ (a) . \supset . F \in D$
(2– y la definición ontológica $[A\ B] : A = B . \equiv . A \in B . B \in A$)

8– $Kl\ (a) \in C$
(un teorema de Ontología y 3–, 7–)

9– $Kl\ (a) \in Kl\ (a)$
(8– y el teorema de Ontología)

10– $Kl\ (a) \in el\ Kl\ (a)$
(9– y 3.1)

11– $C \in el\ Kl\ (a) . A \in el\ Kl\ (a)$
(11–, 6–, 3.3)

IV. La consistencia del sistema de Meriología

De acuerdo con Sobociński, la consistencia de Meriología fue probada por Leśniewski usando la teoría de los números reales. Sin embargo, esta prueba nunca fue publicada. Más tarde Robert Clay en su tesis doctoral presentada en la Universidad de Notre Dame logró construir tal prueba. Esta consiste en mostrar que si el sistema de Ontología con la adición de los axiomas de los números reales es consistente, entonces Meriología es consistente. El problema de la prueba de Clay es que hacía depender la consistencia de una teoría simple en una teoría que no es tan obvia como la primera.

Años más tarde, en 1968, C. Lejewski publicó (11) una prueba de la consistencia de la Meriología basándose en la consistencia de Prototética. Esto es, probó que si el sistema de Prototética es consistente, entonces Meriología también lo es. Esta prueba posee la ventaja sobre la de Clay de hacer depender la consistencia de Meriología sobre la base de una teoría más obvia y cuya consistencia ya ha sido probada (12).

V. La paradoja de Russell

Dado que el sistema de Meriología es consistente, la paradoja de Russell no se puede producir en este sistema. Intuitivamente la paradoja no se puede presentar en este sistema debido a que todo objeto es elemento de sí mismo, como lo afirma el axioma 3.1 y toda clase es un objeto como lo afirma la definición meriológica de clase (Df. 5). Sobre estos dos supuestos no existe una clase de clases que no sean elementos de si mismas (pues en Meriología no existen las clases vacías) (13).

VI. Extensiones de Meriología

Partiendo del sistema de Meriología se pueden construir dos sistemas mutuamente excluyentes, a saber: la Meriología atómica y la no atómica. El primer caso se obtiene agregando el supuesto, al sistema de Meriología, de que todo objeto es un átomo meriológico (i. e. un objeto que no tiene partes) o una clase construida a partir de átomos, los cuales constituyen sus elementos. El segundo caso se logra mediante la adición a la Meriología del supuesto de que no existen átomos meriológicos. En términos más formales, se puede obtener un sistema de Meriología atómica agregando el siguiente axioma o sus equivalentes a cualquier sistema de Meriología:

$$[A] \therefore A \in A . \supset [\exists B] \therefore B \in \mathrm{el}\,(A) : [C] . C \in \mathrm{el}\,(B) . \supset . C = B$$

y agregando el siguiente axioma o sus equivalentes a cualquier sistema de Meriología obtenemos un sistema de Meriología no atómica:

$$[A] : A \in A . \supset . [\exists B] . B \in \mathrm{pt}\,(A)$$

Cabe agregar que el sistema de Meriología es neutral con respecto a la existencia de átomos.

V.F. Richey definió la noción de átomo meriológico y la noción de ser átomo de algo del siguiente modo respectivamente:

$$[B] \therefore B \in B : [C] . C \in \mathrm{el}\,(B) . \supset . C = B : \equiv . B \in \mathrm{atm}$$

$$[AB] : B \in \mathrm{el}\,(A) . B \in \mathrm{atm} . \equiv . B \in \mathrm{atm}\,(A)$$

La primera definición permite reducir el axioma característico de Meriología a:

$$[A] : A \in A . \supset . [\exists B] . B \in \mathrm{el}\,(A) . B \in \mathrm{atm}$$

y la segunda definición a:

$$[A] : A \in A . \supset . [\exists B] . B \in \mathrm{atm}\,(A)$$

Ahora bien, el sistema axiomático citado, de Meriología atómica, toma a "el" como functor primitivo. Sin embargo, Sobociński construyó un sistema axiomático de Meriología atómica (14) usando a "atm" como functor primitivo. A estos resultados se agregó la construcción por parte de C. Lejewski de los primeros sistemas axiomáticos de Meriología no atómica con un solo axioma. Más tarde, Robert Clay ofreció sistemas con un solo axioma, axiomas que eran más cortos que los de Lejewski (15).

Por último, la consistencia de la Meriología atómica fue probada por Sobociński; para ello usó una interpretación en Prototética análoga a la de Lejewski para Meriología (16).

VII. Algebra Booleana y Meriología

Se han establecido varias relaciones entre el Algebra Booleana y la Meriología. Para citar un ejemplo, Robert Clay probó que la Meriología es una Algebra Booleana completa sin el elemento cero y que toda Algebra Booleana completa sin el elemento cero es una Meriología. Sin embargo, hay que agregar que Clay en este caso usa una definición de Algebra Booleana que no postula la existencia del elemento no cero, pues debido a características propias de los sistemas de Leśniewski no se puede postular la existencia de objeto alguno y la definición usual de Algebra Booleana si postula la existencia de tal elemento (17).

Por otro lado, el mismo Clay ha establecido relaciones entre topología y Meriología (18).

VIII. Algunas notas históricas finales

La Meriología tuvo su origen en Polonia con Stanislaw Leśniewski y aqui fue desarrollada hasta cierto grado por discípulos del mismo Leśniewski. Años más tarde, a finales de los años 50 y en los 60, Sobociński dio a conocer tal teoría en la Universidad de Notre Dame, en donde algunos de los discípulos de Sobociński, entre los cuales se encontraban Robert Clay y V.F. Richey, y el mismo Sobociński se encargaron de desarrollarla. Notre Dame, para ese entonces, se convirtió en un centro de investigaciones lógicas en torno a problemas relacionados con los sistemas de Leśniewski Lejweski (miembro, al igual que Sobociński, de la llamada "escuela polaca de Lógica") aunque no era profesor en Notre Dame, sino en la Universidad de Manchester, sí estuvo de algún modo asociado a Notre Dame.

Actualmente Notre Dame no es más un centro de investigaciones en Meriología o de los otros sistemas de Leśniewski. Su principal precursor, B. Sobociński, falleció en 1980 y ninguno de sus discípulos interesados en Meriología quedó para sustituirlo. Por ejemplo, Rober Clay se encuentra en la Universidad de Venezuela y V.F. Richey en la Universidad Estatal de Ohio. Por otro lado, últimamente el número de publicaciones en Meriología ha descendido, pero esto no significa que en

Meriología no haya problemas importantes, al contrario. El autor del presente artículo espera haber estimulado el interés por la Meriología y ofrecido la información suficiente para iniciarse en este campo de tal modo que algunos de los problemas que presente esa teoría reciban algún grado de esfuerzo intelectual en su solución.

CITAS

(1) No se debe entender aquí "Ontología" en sentido filosófico. En conversaciones que tuve con Sobociński me comunicó que Leśniewski nombró a ese sistema de ese modo debido a que "ontos" es el participio pasivo de $\in$ ιναι cuya primera letra es "$\in$" el functor primitivo de Ontología y además ese functor primitivo tiene un significado análogo a la palabra griega citada: cf. apartado II para más detalles de ese sistema.

(2) Cf. [2] y [4], [25] [26] [27] [28] y [29]

(3) Cf. [16], [15], [20] para más detalles sobre las tres soluciones.

(4) Cf. [19], [17], [13], [14]

(5) En las teorías lógicas de Leśniewski se adopta una teoría llamada "teoría de categorías semánticas". Esta divide las expresiones en categorías semánticas; entre las expresiones lógicas distingue dos categorías semánticas básicas: las de las proposiciones y la de los nombres. La primera incluye proposiciones y expresiones que contienen variables tales que al sustituir sus variables pro constantes se convierten en proposiciones. La segunda incluye nombres y expresiones tales que al sustituir sus variables por constantes se convierten en nombres. Para más detalles Cf. 17.

(6) Voy a explicar el uso de puntos: si un punto o un conjunto de puntos precede inmediatamente un functor o inmediatamente lo sigue, entonces esto indica el alcance del functor. Por ejemplo, si una expresión contiene un conjunto de tres puntos que preceden a "$\supset$", entonces esto indica que el antecedente de la implicación se extiende hasta la izquierda hasta que alcanza más de tres puntos, y lo mismo vale para el consecuente si este sigue a la implicación con tres puntos. Los cuantificadores (que aquí con "[...]" (cuantificador universal) y "[]...]" (cuantificador existencial)) siguen las siguientes reglas con respecto a los puntos: si en una expresión un punto o un conjunto de puntos, por ejemplo 5 puntos, siguen inmediatamente un cuantificador, entonces ello indica que la expresión cubierta por el cuantificador se extiende la derecha sobre los conjuntos de menos puntos (en nuestro ejemplo, sobre los conjuntos de menos de cinco puntos) y sobre los conjuntos de igual número de puntos (en nuestro ejm. sobre los conjuntos de cinco puntos) siempre y cuando no sean seguidos inmediatamente por los functores "$\equiv$", "$\supset$", "V", hasta que alcance un conjunto de puntos de igual número seguido inmediatamente de "$\equiv$" o "$\supset$" o "V"; o hasta que alcanza un número mayor de puntos. Un punto o un conjunto de puntos que no siguen a "$\supset$" o "$\equiv$" o "V" o preceden inmediatamente o no siguen inmediatamente un cuantificador, corresponden al functor de conjunción. La diferencia del functor de conjunción es que su alcance se extiende a la izquierda tanto como a la derecha de expresiones que tienen menos puntos. Para más detalles sobre Ontología cf. [18] [7] [12]

(7) cf. [21]

(8) cf. [5] y [6]

(9) cf. [8]

(10) cf. [9]

(11) cf. [11] [2]

(12) cf. [20]

(13 cf. [29]

(14) cf. [24]

(15) cf. [3] [10]

(16) cf . [24]

(17) cf. [3b]

(18) cf. [3c]

BIBLIOGRAFIA

[1] Canty, John T., "The Numerical Epsilon", *Notre Dame Journal Logic*, Vol. 10 pgs. 63, 1969.

[2] Clay, Robert E., "The consistency of Leśniewski's Mereology in relation to the real number system", *Journal of Symbolic Logic*. Vol. 33, pg 251, 1968.

[3] Clay, Robert E., "Single Axioms for Atomistic and Atomless Mereology", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 16, pg. 45, 1975.

[3b] Clay, Robert E., "Relation of Leśniewski's Mereology to Boolean Algebra", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 39, pg 638, 1974.

[3c] Clay, Robert E., "Some Mereological Models", *Notre Dame Journal of Formal Logic* Vol. 15, pag 141, 1974.

[4] Glibowski, Edmund, "The application of Mereology to grounding of elementary Geometry", *Studia Logica*, Vol. 24, pg 109, 1969.

[5] Lejewski, C., "A conttribution to Lesniewski's Mereology", *Rocznik*, Vol. 5, pg. 43, 1954.

[6] Lejewski, C. "A New Axiom for Mereology", *Rocznik*, Vol. 6, pg. 65, 1955.

[7] Lejewski, C. "On Lesniewski's Ontology", *Ratio*, Vol. 4, pg. 150, 1958.

[8] Lejewski, C. "A note on a problem concerning the axiomatic foundations of Mereology", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 4, pg. 135, 1962.

[9] Lejewski, C., "A single axiom for the Mereological notion of proper part", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 7, pg 279, 1967.

[10] Lejewski, C. "A contribution to the study of extended Mereologies", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 14, pg 53, 1973.

[11] Lejewski, C. "Consistency of Lesniewski's Mereology", *Journal of Symbolic Logic* Vol. 34, pg. 321, 1969.

[12] Leśniewski, St. "Ueber die Grundlagen der Ontologie", *Comptes Rendus des Séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie,* Vol. 23, pg 111, 1930.

[13] Leśniewski, St. "Gruenzuege eines neun Systeme der Grundlagen der Mathematik" *Fundamenta Matematica*, Vol. 14, pg 181, 1929.

[14] Leśniewski, St. "Gruenzuege eines Systems der Grundalagen der Mathematik" *Collectane Logica*, Vol 1, 1938.

[15] Luschei, Eugene C., *The logical Systems of Leśniewski,* North Holland Publishing Co., 1962.

[16] Sinisi, Vito, "Leśniwski's analysis of Russell's Antinomy" *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 17, pag. 19, 1976.

[17] Slupecki, J., "St. Lesniewski's Prothotetics", *Studia Logica*, Vol. 1, 1953.

[18] Slupecki, J., "St. Leśniewski's calculus of names", *Studia Logica*, 1955. Vol. 3.

[19] Sobociński, Boleslaw, "An investigation of Protothetics", *Cahiers de l'Institut d'Etudes Polonaises en Belgique*, 1949.

[20] Sobociński, Boleaw, "L'analyse de L'Antinomie Russellienne par Leśniewski", *Methodos*, Vol. 1, pg 94, pg. 220, pg. 308, 1950.

[21] Sobociński, Bolesaw, "Studies in Leśniewski's Mereology", *Rocznik*, Vol. 5, pg. 34, 1954.

[22] Sobociński, Bolesaw, "On the single axioms of Protothetics", Vol 1, 1960.

[23] Sobociński, Bolesaw, "Atomistic Mereology", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 12, pg. 89, pg. 203, 1971.

[24] Sobociński, Bolesaw, "A note on an axioms system of Atomistic Mereology", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1971.

[25] Sullivan, Theodore F., "Affine Geometry Having a Solid as Primitive" *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 12, pg. 1. 1971.

[26] Sullivan, Theodor F., "The Name Solid as Primitice in Projective Geometry", *Notre Dame Journal of Formal Logic.*, Vol 13, pg 95, 1972.

[27] Sullivan, Theodor, "The Geometry of Solids in Hilbert Spaces", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 14, pg 575, 1973.

[28] Sullivan, Theodore F., "Tarski's Definition of Point in Banach Spaces", *Journal of Geometry,* Vol. 3, pg. 179, 1973.

[29] Tarski, Alfred, "Les fondements de la géométrie des corps" Ksiega Pamiatkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, suplemento a los *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, pg. 29, 1929.