Joseph C. Várrilly

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS CON UN ENFASIS HISTORICO

Summary: *We reconsider the problem of when and how to integrate the history of mathematics into the undergraduate mathematics curriculum. A number of alternatives are reviewed, and one in particular is proposed: the design and use of textbooks with an historical setting and emphasis. We outline a classroom experience based on this method.*

Resumen: *Se reconsidera el problema de cuánto y cómo integrar la historia de la matemática en el currículo de pregrado universitario en matemáticas. Se pasa revista a varias alternativas y se propone una en particular: el diseño y el uso de textos con un enfoque y un énfasis históricos. Se esboza una experiencia docente basada en este método.*

1. Cada vez que un profesor se enfrenta a la tarea de enseñar un tema de matemáticas (o bien de cualquier otra disciplina), se encuentra que su tópico puede organizarse mediante tres jerarquías no necesariamente compatibles: el orden lógico, el orden pedagógico y el orden histórico. Las matemáticas, entre todas las disciplinas, se prestan más al orden lógico de exposición: se puede comenzar, al estilo de Euclides, con una colección de definiciones, postulados y resultados conocidos, y seguir directamente por una cadena de razonamientos deductivos hasta alcanzar la meta propuesta. Para un tema relativamente avanzado (por ejemplo, la clasificación de las álgebras de Lie), este método resulta muy conveniente; pero su empleo en contextos avanzados se apoya en la madurez matemática del estudiante. A la hora de enseñar tópicos más elementales, como el cálculo infinitesimal, el álgebra lineal o la topología de espacios euclideanos, todos los profesores se dan cuenta de un hecho fundamental: el orden lógico no coincide con el orden pedagógico.

Sin embargo, un rasgo notorio de nuestro sistema de enseñanza de las matemáticas es el alto grado de formalismo que caracteriza los cursos: se "presenta" materia en una forma sintética de "definición –teorema– demostración" sin motivación y contexto. Aunque este formalismo se debe en parte a circunstancias históricas (es en cierto grado un subproducto de la onda de "nuevas matemáticas" de los años sesentas, agravado por una rápida expansión de las labores docentes con personal poco capacitado para la investigación), refleja sobre todo la diferencia de madurez matemática entre el profesor y el estudiante. Un profesor que ya domina un tema prefiere organizarlo según un orden lógico; su pregunta preferida es el ¿cómo? El estudiante que enfrenta novedades necesita motivación y contexto; la pregunta suya es el ¿por qué? El profesor está contento con el argumento "supongamos A; A implica B, B implica C, C implica D; luego D es cierto". El estudiante, en cambio, primero quiere saber por qué se quiere comprobar D, por cuál motivo se debe suponer A, y a quién se le ocurrió pensar que B implicaría C. Sin explicaciones de esta naturaleza, que reestructuran la materia en un orden pedagógico, el estudiante puede fácilmente obtener la impresión (muy difundida entre el público general) de que la matemática es un proceso de razonamiento mecánico sin contenido intuitivo.

Otra manera de jerarquizar los contenidos de un curso es seguir el orden histórico, es decir, la sucesión cronológica de la invención (o descubrimiento) de las nociones y técnicas involucradas. Ciertamente nadie seguiría este orden ciegamente para enseñar un curso de matemáticas; pero tampoco es del todo irrelevante. Es precisamente este orden histórico que revela la importancia de un determinado concepto o procedimiento enseñado. Por ejemplo, podemos afirmar que la geometría lobachevsquiana es interesante y digna de estudio debido a (i) los dos milenios de intentos frustrados de demostrar el quinto postulado de Euclides; (ii) el descubrimiento de Bolyai de que pueden plantearse sistemas de postulados diferentes; (iii) la conexión entre esta geometría y la teoría de funciones automorfas de Klein y Poincaré; (iv) su relevancia para estudiar la teoría de la relatividad; (v) su rol central en la clasificación de variedades tridimensionales, un tema de investigación actual (3, 7).

La reconciliación de estos tres ordenes del saber, para formar una labor docente armónica y exitosa, es la tarea permanente de la enseñanza de la matemática. Como profesores, tenemos el deber no solamente de ejecutar una buena labor didáctica con una adecuada motivación pedagógica, sino también de situar lo que enseñamos dentro de un contexto amplio, con raíces en el pasado y ramificaciones hacia el futuro. Tenemos que poner en relieve que la matemática es una creación de la imaginación humana en respuesta a los problemas enfrentados por cada generación. Así, nuestros estudiantes aprenderán que la matemática es una ciencia viva donde todavía queda mucho por hacer.

2. ¿Cómo, entonces, integrar un enfoque histórico en nuestra labor docente? ¿Debemos someter los estudiantes tempranamente a un curso de Historia de Matemática? En principio, ésta no es una mala idea. El conocimiento histórico de muchos estudiantes, al entrar en la Universidad, a veces no va más allá de saber que los babilonios desarrollaron sistemas numéricos y que los antiguos griegos inventaron la geometría. Es imprescindible empezar de una vez formando el marco histórico donde pueden situar los conocimientos que irán acumulando en los próximos años. De hecho, un curso de Historia de matemática para el primer año es perfectamente factible: el libro clásico de D. E. Smith (6), por ejemplo, puede servir como texto.

Sin embargo, el curso temprano de historia tiene serios inconvenientes. Necesariamente es un curso restringido a tópicos "elementales": geometría clásica, álgebra elemental (resolución de ecuaciones), el concepto de límites, derivadas y rectas tangentes, representación plana de números complejos. Cualquier intento de profundizar en tópicos más sofisticados (como la constructibilidad por regla y compás, sumas de Riemann e integrales, series de Taylor, funciones analíticas, grupos de matrices, clasificación de curvas y superficies) tropieza con la dificultad de que el estudiante carece de bases formales para comprender esos temas integramente. Para poder abarcar temas más avanzados, tiene más sentido colocar el curso de Historia de Matemática en el último año de la carrera de bachillerato, y así se hace efectivamente en la Universidad de Costa Rica. Pero con eso regresamos al punto de partida, ya que se elimina (del currículo formal, pero también en la práctica) la formación del marco histórico de las matemáticas a lo largo de los años anteriores.

Otra posible solución al problema de la integración histórica de las matemáticas, sería una especie de minicurso o seminario, organizado al final de cada año de la carrera, en donde el estudiante debe hacer un balance de las raíces históricas de lo que aprendió en el año. Este seminario podría culminar con un proyecto de recopilación bibliográfica sobre un tema histórico-matemático específico. Desafortunadamente, ignoro si se han hecho experimentos con este tipo de seminario o que resultados podrían esperarse.

La solución ideal, cuando sea factible, es que los propios estudiantes tomen la iniciativa y formen un club para el estudio extracurricular de tópicos matemáticos. (El autor participó en un club de este tipo durante sus años de pregrado). Estos clubes suelen orientarse en tres direcciones que son de interés directo para los estudiantes: (a) introducciones a temas avanzados (¿qué son funciones elípticas? ¿qué son las distribuciones? ¿cómo se clasifican los grupos finitos?; (b) aplicaciones de la matemática (espacios de Hilbert en la física cuántica, ecuaciones diferenciales para circuitos eléctricos, análisis combinatoria de algoritmos de computación); (c) temas históricos (¿cómo se inventó el cálculo diferencial? ¿cómo se resolvieron las ecuaciones cúbicas? ¿de dónde surgieron las matrices y los espacios vectoriales? ¿cuál es el origen de la teoría de conjuntos?). De hecho, en la Universidad de Costa Rica, la asociación de estudiantes de matemática ha emprendido varios intentos de formar este tipo de grupo de estudio, con un éxito parcial: como no hay una tradición y una estructura formal ya establecidas, las iniciativas tienden a ser esporádicas y discontínuas. Pero hay una esperanza de que estos intentos de autoformación eventualmente se consolidarán: sólo requieren que los estudiantes tomen conciencia clara de su rol de aprendedores y no de meros "educandos" o receptores de conocimientos.

3. Si no podemos confiar solamente en cursos de Historia de Matemáticas, y si a corto plazo no podemos esperar gestos espontáneos de los estudiantes, ¿qué alternativa nos queda? Lo que hay que hacer es intercalar la formación del marco histórico en los cursos regulares de matemáticas. Es necesario reorientar el contenido de los cursos para insertar en ellos el contexto, pasado y actual, de los temas que componen cada curso. Por ejemplo, un curso de cálculo diferencial debe incluir una breve sinopsis de los logros de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz; pero también podría incluirse una mención de los modernos métodos "no standard" (5) que permiten rigorizar y explotar a fondo las ideas de Leibniz sobre infinitésimos para poder hacer "cálculo intuitivo".

Un prerrequisito indispensable aquí es la capacidad del profesor de dar un curso con un enfoque histórico. En las circunstancias actuales, encontramos que muchos profesores han sido formados bajo el mismo sistema ahistórico que ahora están transmitiendo a la próxima generación. Se necesita entonces un proceso de capacitación para algunos de ellos, para llenar lagunas que ellos podrán tener en sus conocimientos acerca de los antecedentes de los temas que enseñan y sobre su desarrollo actual (la historia no es solamente el pasado). De esta manera, un enfoque histórico obliga a los profesores, aun más que los estudiantes, a emprender un esfuerzo continuo de actualización.

Podemos distinguir dos formas de introducir un contenido histórico en un curso de matemática. La primera forma es por medio de anécdotas y datos biográficos sobre los creadores de la matemática. A manera de ejemplo, el libro de análisis real de Bartle (1) (que es un excelente texto de segundo año de bachillerato), cuando menciona las series de Taylor o los multiplicadores de Lagrange, dedica tres o cuatro renglones para informar al lector de quienes eran Taylor y Lagrange. Por otra parte, varios profesores suelen sazonar sus lecciones con anécdotas sobre la muerte de Galois, el fracaso de Weierstrass como estudiante, el graffito de Hamilton sobre el puente, etc. A primera vista, ésto no tiene mucho valor, puesto que se enfatiza cosas inesenciales en la vida de esos matemáticos. Sin embargo, tiene la ventaja de estimular el interés del estudiante y de hacerlo ver que la matemática es una creación de seres humanos y no una teoría seca y terminada.

La segunda forma de combinar la matemática con su historia es la de usar argumentos matemáticos históricos en una forma integral. Podemos afirmar que el "contenido" de un curso de matemática consiste en introducir varios conceptos y técnicas, amén de trazar sus consecuencias y sus relaciones con conceptos y técnicas ya conocidos. Por ejemplo, un curso introductorio de cálculo en varias variables debe introducir derivadas parciales, planos tangetes, diferenciales, integrales múltiples y de línea, orientación de superficies; a la vez se ve la relación de estas nociones con el cálculo de una variable, con problemas de máximos y mínimos, con el cálculo de volúmenes y de longitudes de arco. Al enfrentarse con un concepto novedoso, el estudiante puede preguntar ¿cómo es posible de que eso hubiera ocurrido a alguién por primera vez? Aquí hay una excelente oportunidad de iluminar el camino, dando un bosquejo del proceso histórico en que tal concepto se desarrolló. (Por ejemplo, se puede indicar cómo el teorema de Green surgió de problemas en la teoría de magnetismo, o esbozar el descubrimiento de Möbius de un polígono tridimensional que no posee área (2)). Lo importante es dar, en forma resumida, el *argumento matemático* que condujo al descubrimiento y desarrollo del nuevo concepto. De este modo, el estudiante puede ubicar el concepto en un marco de ideas y así comprender mejor su importancia.

4. Se percibe que un enfoque histórico que va más allá de lo puramente anecdótico requerirá del profesor un esfuerzo de preparación considerable. En principio, podríamos esperar que el profesor haga este esfuerzo en forma automática, como parte de su profesionalismo docente. Desgraciadamente, la realidad es otra: muchos profesores, abrumados por sus labores de investigación, o restringidos por la escasez de recursos bibliográficos,

o simplemente desanimados por la burocracia de su academia, no están en condiciones de emprender esta tarea de autocapacitación. Por lo tanto se impone una necesidad de dar acceso fácil a la información histórica requerida.

Una manera de proporcionar esta información, tanto al profesor como al estudiante, es por medio de textos matemáticos con un enfoque histórico. A modo de ejemplo, consideramos el libro de cálculo de Priestley (4). Este texto reestructura el orden usual de un curso de cálculo para poder presentar todas las ideas centrales en su contexto histórico. Además enfatiza el desarrollo y el proceso de creación del cálculo infinitesimal, aún cuando ésto implica andar por caminos más largos que los del tratamiento habitual. Ilustra bien la famosa frase de André Weill: "la lógica es la higiene del matemático, pero no es su fuente de comida".

Otro tópico que puede ser enseñado con un texto con un enfoque histórico, es la geometría elemental. He probado este método con un texto que fue diseñado para estudiantes costarricenses ("Elementos de Geometría Plana" (8)). La secuencia de los tópicos sigue de manera aproximada el orden histórico: geometría euclideana, trigonometría, geometría analítica, geometría inversiva y proyectiva, grupos de transformaciones. Cada tema está dividido en secciones, separadas por notas explicativas de naturaleza histórica y técnica. De este modo, el profesor (y el estudiante) puede pasar revista al origen y desarrollo de ciertos tópicos importantes. Más importante aún, el estudiante tiene a su disposición, sin tener que hacer una gran revisión bibliográfica, un esbozo del contexto histórico de los temas de la geometría.

Como ejemplo, la sección sobre la medición de ángulos y las funciones trigonométricas contiene notas bibliográficas sobre Hipparcos y Tolomeo, una mención de los datos astronómicos de los babilonios que sirvieron de fuente para la trigonometría, la derivación etimológica de la palabra "seno", una nota sobre el cálculo de longitudes de arco, y varias aproximaciones antiguas al valor de *pi*.

La reacción de los estudiantes ha sido positiva, en los dos semestres en que he tenido oportunidad de enseñar la geometría con base en este texto. Por lo general, han mostrado gran interés en los matemáticos que crearon la teoría que están aprendiendo, y más interés todavía en el manejo histórico de las ideas. Participan en clase bastante más que en otras clases en donde se usan textos tradicionales. Algunos de ellos han indicado el deseo de tener más textos con una estructura semejante.

5. En vista de lo anterior, se puede proponer una posible solución a la dificultad de situar el contexto histórico en la enseñanza de la matemática. Consiste en la preparación y el uso de libros de texto que combinan una presentación moderna de un tema de matemáticas con el desarrollo histórico del tema, dando, en paralelo con el orden pedagógico del tema, una exposición de los argumentos matemáticos originales usados en la creación de los conceptos estudiados. Esto tiene la doble ventaja de estimular el interés del estudiante y de proporcionar al profesor una herramienta apta para la tarea de una enseñanza integral de las matemáticas.

NOTAS

(1) R. G. Bartle. *The Elements of Real Analysis*, 2ª edición, Wiley, New York, 1976.

(2) F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Viewpoint: Vol. 2, Geometry*, Dover, New York, 1958.

(3) J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc. 6* (1982), 9-24.

(4) W. M. Priestley, *Calculus: An Historical Approach*, Springer, Heidelberg, 1979.

(5) A. Robinson, *Non-standar Analysis*, 2ª edición, American Elsevier, New York, 1974.

(6) D. E. Smith, *History of Mathematics*, 2 tomos, Dover, New York, 1958.

(7) W. P. Thruston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. 6* (1982), 357-381.

(8) J. C. Várilly, *Elementos de Geometría Plana*, en manuscrito, San José, 1982.