

Luis Camacho

La paradoja de Lewis Carroll en Douglas R. Hofstadter

Summary: *Hofstadter's explanation of the origin of Carroll's paradox as an infinite regression is analyzed by focusing on the need for evidence, as opposed to what Hofstadter calls "faith."*

Resumen: *se analiza la explicación que da Hofstadter de la paradoja de Carroll como un caso de regresión infinita centrándonos en la necesidad de la evidencia, y no de lo que Hofstadter llama "fe".*

1. El diálogo de Lewis Carroll "Lo que la tortuga dijo a Aquiles" apareció publicado en 1895 en el número 4 de la revista *Mind*, páginas 278-280. Se trata, pues, de una publicación tardía del autor, quien murió tres años después. También es un diálogo muy corto, de apenas tres páginas. Aparece reproducido en las páginas 43-45 de la obra de Douglas R. Hofstadter *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Vintage Books, 1980). Es de notar que en la portada de este libro, aunque no en la página del título, aparece un subtítulo que dice: "A Metaphorical Fugue on Minds and Machines in the Spirit of Lewis Carroll". El diálogo de Carroll plantea la paradoja de la regresión al infinito en el caso de la inferencia, lo que a su vez permite a Hofstadter plantear la siguiente pregunta: *¿siguen reglas formales las palabras y los pensamientos, o no?* Y añade Hofstadter: *este problema es el problema de este libro.*¹

2. El diálogo de Carroll tiene lugar entre los dos personajes de la paradoja de Zenón de Elea,

Aquiles y la tortuga. Cada uno ha sido escogido por el atributo que le es proverbial y que es justamente contrario al del otro: Aquiles por su rapidez, la tortuga por su lentitud. Se supone al comienzo que la paradoja de Zenón ha sido resuelta, tanto en la práctica (de ahí la frase que Carroll incluye en latín, *solvitur ambulando*, se resuelve caminando) como en la teoría: Aquiles explica a la tortuga que le ha ganado en la carrera porque las distancias a recorrer disminuían constantemente.

Plantea enseguida la tortuga el problema de lo que habría ocurrido en caso contrario, si las distancias hubieran aumentado constantemente: Aquiles contesta que en tal caso no estaría allí y la tortuga habría dado varias vueltas al mundo en ese mismo tiempo. De hecho esta posibilidad es esencial para lo que sigue, pues ahora la estrategia será la de incrementar la distancia constantemente entre dos puntos, en este caso entre las premisas y la conclusión de un argumento, o entre el antecedente y el consecuente de un condicional. La tortuga introduce el asunto con la pregunta a Aquiles de si quiere escuchar acerca de una carrera que la gente considera se puede recorrer en dos o tres pasos, cuando en realidad consiste en un número infinito de distancias, cada una mayor que la anterior. Aquiles saca entonces un cuaderno de apuntes, y procede a apuntar lo que la tortuga le dicta.

3. Antes de formular el problema, dos advertencias sobre terminología.

3.1 Carroll habla primero de argumento ("argument") pero lo que hace es establecer tres

proposiciones, sin incluir ninguna de las partículas que suelen indicar separación entre premisas y conclusión, tales como “por tanto”, “por consiguiente” o alguna otra equivalente. En el resto del diálogo, sin embargo, no habla de argumento sino de proposición hipotética (“Hypothetical Proposition”) o, simplemente, “hypothetical”. Como veremos más adelante al hacer la simbolización formal, lo lógico sería que Aquiles se refiera al conjunto de proposiciones como argumento y la tortuga a ese mismo conjunto como proposición hipotética o condicional, pues de hecho Aquiles aplica reglas de inferencia para obtener la conclusión, mientras la tortuga transforma las reglas de inferencia en premisas adicionales. Sin embargo los dos términos, el de argumento y el de proposición hipotética, aparecen introducidos por primera vez y usados por la tortuga.

3.2 En la primera página del diálogo la tortuga se refiere a la proposición “Things that are equal to the same are equal to each other” como First Proposition de Euclides, sin duda refiriéndose a la obra *Elementos*. Sin embargo, esta proposición aparece más bien como la primera de una lista de cinco “nociones comunes” al comienzo de dicha obra, inmediatamente antes del Libro I, que justamente empieza con una primera proposición, que más bien es la propuesta de hacer algo: “Sobre una línea recta finita construir un triángulo equilátero”.² También podríamos traducir esta noción común proposición primera como *axioma*.

4. El argumento difícilmente podría ser más sencillo y convincente. La tortuga dicta a Aquiles un argumento tomado de Euclides, con dos premisas y una conclusión, proposiciones numeradas con las letras (A), (B) y (Z).

- (A) Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- (B) Los dos lados de este triángulo son cosas que son iguales a una misma cosa.
- (Z) Los dos lados de este triángulo son iguales entre sí.

A continuación la tortuga sistemáticamente plantea tres posibles actitudes respecto de este argumento:

(1) Suponemos que la mayoría de las personas consideran verdaderas las premisas y la conclusión, y además consideran válida la inferencia de A y B a Z. La conclusión (Z) se sigue lógicamente de (A) y (B), de modo que alguien que acepta las dos premisas como verdaderas debe aceptar la conclusión como verdadera. En el texto original se destaca la palabra “debe” (MUST).

(2) Alguien podría negarse a aceptar (A) y (B) como verdaderas y sin embargo aceptar que la secuencia es válida. Su posición se podría formular de la siguiente manera: “Acepto como verdadera la proposición hipotética “Si A y B son verdaderas, entonces Z es verdadera, pero no acepto que A y B sean verdaderas”.

(3) Podría darse el caso de alguien que acepte A y B como verdaderas, y que sin embargo no acepte la proposición hipotética. Su posición sería: “Acepto A y B como verdaderas, pero no acepto que si A y B entonces Z”.

Nótese que el lector (1) es el caso típico de quien está de acuerdo con Aquiles. Los otros dos casos son los de quienes se niegan a aceptar el argumento, y la tortuga se ubica en el último de estos tres casos, a saber el de quien acepta las premisas como verdaderas pero se niega a aceptar la conexión con la conclusión (en el caso de que veamos este conjunto de proposiciones como un argumento, tal como se dice al principio del diálogo), o de quien acepta las proposiciones del antecedente como verdaderas pero se niega a aceptar el condicional como un todo, si lo vemos como una proposición hipotética, tal como se hace en el resto del diálogo.

El siguiente paso es crucial, y a mi juicio constituye la trampa en la que Aquiles cae: según la tortuga, y Aquiles está de acuerdo, en los casos (1) y (2) el lector no estaría bajo la necesidad lógica de aceptar como verdadera la proposición Z. La tortuga pide a Aquiles que la considere en la categoría última de los casos de no-aceptación. Una vez dado este paso, es muy fácil para la

tortuga retar a Aquiles a que la fuerce lógicamente a aceptar Z como verdadera, y ésta es la clave que introduce el infinito: ahora Aquiles va a tener que introducir cada vez premisas, por un procedimiento recursivo que no tiene fin. Nos basta señalar los dos siguientes pasos, porque lo que sigue es repetición de lo mismo.

Aquiles formula la proposición (C): si A y B son verdaderas, Z debe ser verdadera. Pide a continuación a la tortuga que acepte (C) para que pueda aceptar (Z). Ahora el argumento consta de tres premisas en vez de dos, y supuestamente es más contundente: si A y B y C son verdaderas, Z debe ser verdadera. La tortuga responde que la proposición hipotética ahora formada es diferente a la anterior, pues tiene una proposición más, y que de nuevo acepta como verdaderas A , B y C , y sin embargo sigue sin aceptar Z . Por el mismo procedimiento la tortuga pide a Aquiles escribir un nuevo condicional con una premisa más, (D), que dice: si A , y B , y C son verdaderas, entonces Z debe ser verdadera.

En cada caso, el condicional formado con una nueva proposición se denomina por la letra siguiente, que a su vez se introduce como nueva proposición en la siguiente versión. Así, el condicional (D) dice que si A , B y C son verdaderas, Z debe ser verdadera. El condicional siguiente es el (E), según el cual si A , B , C y D son verdaderas, Z debe ser verdadera. De este modo Carroll introduce dos niveles, aunque no lo mencione: si llamamos C el condicional original, que consta de las proposiciones nombradas (A) y (B), entonces el nombre del siguiente condicional será $C+1$, es decir (D) (y en general $n+1$), que a su vez incluye (C) como parte del antecedente. La necesidad de aceptar la conclusión Z se ve en el condicional C como una relación entre A , B y Z , mientras en D se ve como una relación entre A , B , C y Z . Nombrar cada condicional nos permite verlo desde otro nivel, lo que resulta muy conveniente para Hofstadter, cuya distinción entre niveles, entre argumentos y meta-argumentos, entre condicionales y metacondicionales, entre deseos y metadeseos, etc., es constante a lo largo de la obra mencionada.

En otra sección de su obra Hofstadter³ simboliza las respectivas posiciones de la siguiente manera:

- Aquiles: si tienes $((A \wedge B) \supset Z)$ y también tienes $A \wedge B$, entonces con seguridad obtienes Z .
- Tortuga: ¡Oh! Lo que quieres decir es que tenemos $((((A \wedge B) \supset Z) \wedge (A \wedge B)) \supset Z)$, ¿no es verdad? Con esta maniobra, lo que hace la tortuga es transformar la regla de inferencia que usa Aquiles, el bien conocido *modus ponens*, en una parte de un sistema que continúa indefinidamente.

5. Antes de continuar podemos hacer algunas consideraciones sobre la situación de Aquiles.

5.1 La primera y más obvia es que una vez que se admite que se requiere una premisa más, no hay manera de detener el proceso infinito. Nótese que la premisa que se introduce es una meta-premisa, pues no se refiere al contenido de las otras sino a su carácter de premisas. Lo que hace es introducir una condición para la inferencia dentro de la inferencia misma, y esto debilita la relación entre premisas y conclusión. La necesidad de esta relación se diluye en vez de fortalecerse con la introducción de la meta-premisa dentro del condicional, y cada vez se diluye más con la introducción de las premisas adicionales. Además, la meta-premisa simplemente se hace cada vez mayor al tener que incluir no solo a las premisas iniciales sino a todas las meta-premisas posteriores.

5.2 La segunda observación tiene que ver con la diferencia entre lo formal y lo material, entre la estructura del argumento y el contenido de premisas y conclusión. La información contenida en las versiones sucesivamente más largas sigue siendo la misma: no sabemos nada nuevo sobre lados de los triángulos con la introducción de las premisas adicionales. El argumento de Euclides lo podemos formular en cálculo cuantificado con identidad o en cálculo proposicional y la necesidad de la conclusión en relación con las premisas se convierte en propiedad del cálculo formal, pero no hace falta llegar hasta allí para admitir que la conclusión se sigue con necesidad de las premisas. Más aún, parece más convincente la necesidad cuando la vemos como parte de la

argumentación concreta: hay una premisa mayor que establece que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, y luego otra menor que afirma que dos lados de un triángulo determinado son iguales a un tercer lado. La conclusión establece lo que nos parece obvio, a saber, que entonces esos dos lados son iguales entre sí.

5.3 Pero quizá el punto más importante es el siguiente: la separación y luego confusión entre niveles se da justamente en el planteamiento e inicio del problema, al resumir Aquiles la posición de la tortuga diciendo que ésta acepta A y B, pero no el condicional C, según el cual si A y B son verdaderos Z debe ser verdadero. Es aquí mismo donde se da el problema profundo: Aquiles debía haberse concentrado en la conexión entre A y B con Z, no en la relación entre A y B, por un lado, con C por otro. Podría haber preguntado por qué la tortuga rechazaba Z habiendo aceptado A y B, y mostrar luego por una reducción al absurdo cómo de la negación de Z y las premisas A y B se sigue una contradicción. Dicho de otro modo, la necesidad de la conexión se da entre A y B por un lado con Z por otro, no entre A y B como premisas y C como reformulación del argumento. La necesidad es algo que se predica de la relación entre premisas y conclusión, no de la relación entre premisas y meta-premisas. Pretender que la necesidad lógica se convierta en necesidad física mediante recurso a metapremisas es un intento fallido: siempre es posible que alguien físicamente se niegue a aceptar la necesidad lógica, y cuando esto ocurre es poco lo que podemos hacer.

Podríamos utilizar otros ejemplos más cercanos al individuo, o podríamos tratar de convencerlo de que en la vida cotidiana utiliza argumentos de la misma estructura todo el tiempo. Podemos suponer que su negativa a aceptar lo obvio es simplemente maldad, y en todo caso la lógica no es una fuerza física ni psicológica que obligue a los individuos.

6. Hofstadter utiliza el diálogo de Carroll para proponer su propio tema, a saber, el de la inclusión o no de reglas formales en el uso de palabras y pensamientos. Su conclusión es que la introducción de reglas formales en el uso mismo

de las palabras no resuelve el problema de tener que llegar a un punto más allá del cual no podemos seguir probando o demostrando. Desgraciadamente llama "fe" a este punto, cuando este término más bien tiene una connotación de ausencia de pruebas o evidencia:

This little debate shows the difficulty of trying to use logic and reasoning to defend themselves. At some point, you reach rock bottom, and there is no defense except loudly shouting, "I know I'm right!" Once again, we are up against the issue which Lewis Carroll so sharply set forth in his Dialogue: you can't go on defending your patterns of reasoning forever. There comes a point where faith takes over.⁴

¿Por qué "fe"? Podría haber dicho convención, o evidencia, o certeza. Aristóteles diría que se trata de certeza personal basada en la evidencia objetiva, y justamente habría demostrado la necesidad de llegar a este punto para evitar la regresión al infinito. Pues si la demostración ha de ser firme no puede proceder al infinito ni ser circular, y por tanto debe basarse en algunas premisas últimas de las que no podemos dudar aunque alguien diga que se duda.⁵ "Fe" no parece ser la categoría apropiada para la aceptación de la evidencia, es decir, para la certeza que se convierte en fundamento para la argumentación posterior.

Notas

1. Douglas R. Hofstadter *Gödel, Escher, Bach* p.46.
2. En la edición de la Enciclopedia Británica titulada Great Books of the Western World (Chicago, etc.:1952), volumen 11, aparecen ambas proposiciones en la página 2.
3. Obra citada, página 193.
4. Obra citada, p.192.
5. Entre otros lugares, véanse los capítulos 2 y 3 de la *Analítica Posterior*

Bibliografía

- Aristóteles *Analítica Posterior*. En *Obras*, traducción de Francisco de P. Samaranch (Madrid: Aguilar, 1964), pp.355-415.

