UN SISTEMA DE DEDUCCION NATURAL CON BASE EN LAS "LEYES DEL PENSAMIENTO"

Claudio Gutiérrez

A deductive theory is called CONSISTENT or NON-CONTRADICTORY if two asserted statements of this theory contradict each other, or, in other words, if of any two contradictory sentences at least one cannot be proved. A theory is called COMPLETE, on the other hand, if any two contradictory sentences formulated exclusively in the terms of the theory under consideration (and the theories preceding it) at least one sentence can be proved in this theory...

Let us now imagine that a deductive theory is inconsistent, that is to say, that two contradictory sentences occur among its axioms and theorems; from a well-known logical law, namely, the law of contradiction... it follows that one of these sentences must be false. If, on the other hand, we assume the theory to be incomplete, there exist two relevant contradictory sentences of which neither can be proved in that discipline; and yet, by another logical law, i.e. the law of excluded middle, one of the two sentences must be true...

ALFRED TARSKI (1)

El contraste más inmediato entre la llamada lógica clásica y la lógica moderna parece ser la sujeción a "leyes del pensamiento" fijadas de la primera y la relativa libertad de maniobra de la segunda en el escogimiento de sus axiomas y reglas de inferencia. Sin embargo, tal libertad, como lo aclara muy bien la cita que encabeza este artículo, está esencialmente limitada por los principios últimos de *consistencia* y de *completitud* que todos los sistemas lógicos deben inevitablemente respetar. La importancia de estos principios dentro de la lógica moderna es usualmente oscurecida por el hecho de existir tautologías de "no contradicción" y de "tercero excluido" que son simples teoremas demostrables desde los axiomas. Los axiomas, por su parte, tienden a ser muy distintos de las tradicionales "leyes del pensamiento" y, casi siempre, mucho menos intuitivamente evidentes. Esta situación me parece lamentable desde el punto de vista teórico, y especialmente desde el punto de vista pedagógico. ¿Por qué no crear un sistema en que las *leyes* de no contradicción y de tercero excluido tengan una posición tan central como los correspondientes *principios* de consistencia y de completitud? En las líneas que siguen describiré lo que he logrado hacer en ese sentido.

Pero antes de seguir debo expresar una idea concomitante de valor pedagógico incuestionable. Se ha dicho muchas veces que el formalismo permite tratar los problemas lógicos como si fueran un juego. Sin embargo los sistemas lógicos existentes no se prestan para operar efectivamente en las fórmulas de una manera física. Sería necesario poder trabajar sobre ellas de modo que mediante la aplicación de las reglas se produjeran cambios materiales en las expresiones que dieran por resultado final la aparición de la conclusión. Para lograr esto sería deseable una simplificación lingüística a partir de las conectivas comúnmente usadas, por ejemplo, aprovechando los fenómenos de *dualidad* para unificar en un solo signo físico las ideas de disyunción, conjunción, y

(1) *Introduction to Logic* (New York: Oxford University Press, 1946), p. 135.

negación. Esto es posible gracias al hecho curioso de que las tablas de verdad de expresiones duales son "imágenes en el espejo" unas de las otras. El sistema de deducción natural que resulta de la combinación de estas dos ideas (la centralidad de los principios lógicos y el uso de una conectiva única basada en el fenómeno de dualidad) es tan extraordinariamente sencillo que permite la enseñanza de la lógica a niños especialmente dotados de seis y siete años (2).

Imaginemos un tablero que se extiende indefinidamente hacia la derecha, compuesto de pares de patios iguales, uno encima del otro. Los dos primeros patios, en el extremo izquierdo del tablero, serán el de arriba el *patio principal* o de las premisas, el de abajo el *patio final* o de la conclusión. Los otros pares de patios los llamaremos a cada uno *patios gemelos*, y al conjunto infinito las *filas* (de patios) *secundarias*. Proveamos comunicación de unos patios a otros de esta manera: ningún patio se comunica con su vecino de arriba o abajo; cada patio de arriba se comunica (de acuerdo con las reglas) con los dos patios que siguen a la derecha; ningún patio de abajo se comunica con ninguno de sus vecinos de la derecha ni tampoco con su vecino inferior de la izquierda. El tablero es en todo momento concebido como formado por dos sectores, el *sector vacío* (siempre infinito) y el *sector no-vacío* que incluye al patio principal y al patio final. El tablero se puede construir en un momento en el pizarrón con unas cuantas rayas, o se puede hacer de cartón u otro material en forma más permanente. Las fórmulas pueden ser escritas; sin embargo, idealmente deberían ser bloques físicamente manipulables, a fin de aprovechar todas las ventajas pedagógicas del sistema.

En el tablero así descrito podemos "jugar" varios juegos, los más importantes de los cuales son el *juego de la figura* (lógica de proposiciones) y el *juego del color* (lógica de cuantificadores de primer orden). Las reglas son fácilmente ampliables para permitir un *juego avanzado I* (lógica de identidad) y un *juego avanzado II* (lógica de cuantificadores de segundo orden). El objeto del juego es transformar las premisas y la conclusión de tal manera que en el patio principal quede producida una réplica exacta de todo el contenido del patio final.

A continuación doy las reglas de los dos juegos fundamentales:

Juego de la figura.

Reglas de formación:

1. Cualquiera de las letras u , v , w ó y por sí sola es una fórmula (básica) regular (de primer orden).
2. El signo V seguido de dos fórmulas, una por lo menos regular, es también una fórmula regular.
3. La imagen-en-el-espejo, sobre el eje longitudinal, de una fórmula regular, es también una fórmula regular.

Es de notar que nuestro sistema constitutivo es completo para el cálculo proposicional, puesto que el signo V en esta posición representa la conectiva disyuntiva, mientras que en posición inversa (imagen-en-el-espejo) representa la conectiva conjuntiva. No hay signo especial de negación, pero el hecho de formar una imagen-en-el-espejo de una fórmula significa la operación de negar esa fórmula. Es importante notar que en este sistema de notación las leyes de DeMorgan resultan inexpresables, con la consiguiente simplificación práctica.

(2) Comprobé esto experimentalmente con un grupo de niños de la escuela primaria Saint Thomas The Apostle, en Chicago, Illinois en el año lectivo 1956-66.

Reglas de transformación:

A. *Regla de conexión.* Una fórmula que comienza con V puede ser abierta, es decir, sus componentes inmediatos pueden ser puestos en patios gemelos, un componente en cada patio, en cualquier fila del sector vacío, eliminándose la conectiva. Si se tiene una fórmula en un patio superior es posible duplicarla en cualquiera de los patios a la derecha del patio en que la fórmula original está. Una fórmula abierta puede cerrarse en la fila inmediata de la izquierda (patio superior) para lo cual se toma una fórmula independiente de cada uno de los patios gemelos y se conectan las dos fórmulas con una V creada a ese propósito. Los sobros en la fila de la derecha de una operación de cerramiento pueden ser libremente retirados del tablero [para "limpiar" los patios para futuras operaciones de apertura].

Esta regla, como puede verse, es una regla de formación disfrazada de regla de transformación. En efecto, lo único que dice es que las otras reglas pueden ser aplicadas dentro de las fórmulas en V y no sólo en el patio principal, donde están las premisas incondicionalmente verdaderas. También podríamos decir que ésta es la "regla del tablero" que nos dice cómo debe éste usarse al hacer las operaciones. Pero las verdaderas reglas de transformación son las dos siguientes, las cuales, como será fácil ver, se identifican con las tradicionales "leyes del pensamiento", las leyes de no contradicción y de tercero excluido.

B. *Regla de contradicción.* Si se tiene una fórmula regular y también su imagen-en-el-espejo dentro del mismo patio deben destruirse ambas (quitarlas del tablero) y las fórmulas regulares que estén en el patio gemelo pueden libremente pasarse al patio superior inmediato de la izquierda.

Es interesante notar que si las fórmulas contradictorias están en el patio principal se trataría de un caso de premisas inconsistentes. Por supuesto, tal situación nos permite demostrar cualquier cosa. Nótese también cómo es de efectiva la contradicción en el *modus ponendo ponens*: si tenemos de premisas Vuw y la negación de u , podemos abrir la fórmula en V , duplicar la negación de u en el patio en que u está y promover hacia el patio principal a w , la deseada conclusión.

C. *Regla de tautología.* Se puede crear una fórmula regular abierta cuyos componentes inmediatos sean fórmulas regulares recíprocas imágenes-en-el-espejo, en una fila cualquiera del sector vacío.

Esta regla es el correlato del principio de completitud, pues nos permite introducir cualquier fórmula que queramos demostrar (técnica de prueba condicional). Como al mismo tiempo debemos introducir, en el patio gemelo, la negación de la fórmula, la técnica de la prueba indirecta (reducción al absurdo) está a mano, con la intervención de la regla de contradicción, para producir la promoción de la fórmula deseada hacia la izquierda. Invitamos al lector a construirse su propio tablero y probar la demostración de cualquier tautología mediante este expediente, a fin de que descubra por sí mismo la impresionante sencillez de este método de prueba. El cálculo proposicional en esta versión es consistente y demostrablemente completo.

Juego del color.

Reglas de formación: (para ser aplicadas junto con 1-3)

4. *La letra x de cierto color sola en un patio es una fórmula irregular (de primer orden), con tal de que además sea la única fórmula irregular de ese color que esté en ese momento en el tablero.* [Es de notar que de conformidad con 2 es posible que una fórmula irregular figure dentro de una fórmula regular].

5. *El resultado de poner una x de algún color encima de una fórmula regular básica (de primer orden) es también una fórmula regular básica (de primer orden).*

Es de notar que las reglas 4 y 5 generalizan el cálculo proposicional de modo que su sistema constitutivo se hace capaz de expresar cuantificaciones, por ejemplo

$\exists x Vxw$ (donde la x es roja) que significa $(\exists x)(Fx)$, o sea la cuantificación existencial. La restricción en 4 evita, desde luego, las falacias propias de la ejemplificación existencial y de la generalización universal. La ejemplificación existencial se opera exactamente igual que la apertura de una fórmula en V del juego de la figura. La regla 5 convierte las fórmulas proposicionales en fórmulas predicativas, monádicas o poliádicas según el número de letras x que pongamos encima de ellas. El color, como es obvio, identifica las variables individuales. Es de notar que las reglas B y C, aunque perfectamente aplicables a fórmulas regulares que contengan fórmulas irregulares, resulta inaplicable a fórmulas irregulares por la restricción en 4. Varias leyes de la lógica de cuantificadores pueden ser probadas sin necesidad de otras reglas de transformación distintas de A-C. No obstante, para probar todas las leyes es necesario añadir tres reglas más.

Reglas de transformación:

D. *Una V invertida inicial puede ser removida de cualquier fórmula que esté en cualquier patio, incluso en el patio final, liberando así a sus componentes inmediatos como fórmulas independientes.* [Si uno de los componentes liberados es irregular, debe ser destruido por no llenar el primer requisito de 4: no está solo en el patio].

Es de notar que la regla D tiene carácter proposicional y no cuantificacional: podríamos tenerla como una regla más del juego de la figura. Sin embargo, es dispensable para el cálculo de proposiciones. No lo es para el de cuantificación porque el teorema de simplificación hace uso de la regla C sobre un elemento idéntico al que se elimina en la simplificación; si lo que se quiere eliminar es una fórmula irregular, de acuerdo con la restricción de 4 el teorema no puede probarse. Necesitamos pues la regla para el juego del color. Esta regla permite no sólo aplicar ejemplificación universal sino también generalización universal, puesto que el signo conectivo puede quitarse dentro del patio final o de la conclusión; el objeto del juego, producir una réplica en el patio principal de todo el contenido del patio final, puede lograrse sin necesidad de crear una cuantificación universal en el patio principal.

E. *Una fórmula regular, coloreada de acuerdo con 5, la cual no es una fórmula o parte de una fórmula conectada a una fórmula irregular de uno de sus colores, se dice que es una fórmula indefinida.* Las fórmulas básicas que serían indefinidas si no fuera por el hecho de que son una fórmula o parte de una fórmula conectada a una fórmula irregular, se dice que son, junto con tal fórmula irregular, una *cadena definida*.

Si se tiene una fórmula irregular en uno de un par de patios gemelos, es posible crear en el patio superior inmediatamente a la izquierda de la respectiva fila cualquier fórmula que esté en el otro patio gemelo con tal de que el color respectivo no esté presente en la fórmula, excepto tal vez como una cadena definida independiente de la fórmula irregular dicha.

F. Un cadena definida se dice que es *especialmente definida* si la conectiva entre la fórmula irregular y la regular es $\bar{V}$. De lo contrario, se dice que es *totalmente definida*. Se puede re-colorear una cadena definida de tal manera que la re-coloración sea completa y en un solo nuevo color, con tal de que el nuevo color no esté presente por otro concepto en la fórmula regular (cerrada o abierta) de la cual la cadena es parte. Además, se puede re-colorear del mismo modo una cadena totalmente definida con tal solamente de que el nuevo color no sea el color de una cadena especialmente definida presente en la fórmula regular (abierta o cerrada) de la cual la cadena totalmente definida es parte.

En el momento de escribir estas líneas no tengo disponible una prueba rigurosa de la consistencia y completitud del juego del color, aunque estoy convencido de que puede darse. Agradecería sugerencias sobre cómo producirla o el envío de ejemplos en contrario.

NOTA:—El autor conoce el juego WFF'N PROOF de Layman E. Allen. El único parecido entre el presente enfoque y el del Profesor Allen es la idea de que la lógica puede ser tratada como un juego. El juego del Profesor Allen es simplemente un juego de azar en que los jugadores compiten por formar con el resultado del tiro de dados una línea de prueba que se les da como modelo. La lógica es, por así decirlo, extrínseca al juego. El presente "juego" es en cambio un solitario, en que el jugador trata de equiparar premisas y conclusión haciendo uso esencial de las reglas de inferencia. La lógica es intrínseca en el presente juego.